N. PISKOUNOV

cálculo diferencial e integral

volume II

N. PISKOUNOV

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

VOLUME II

TRADUÇÃO DE:

ANTÓNIO EDUARDO PEREIRA TEIXEIRA
Licenciado em Economia (U. P.)
Contabilista diplomado (I. C. P.)

MARIA JOSÉ PEREIRA TEIXEIRA
Contabilista diplomada (I. C. P.)

11.ª EDIÇÃO EM LÍNGUA PORTUGUESA

EDIÇÕES LOPES DA SILVA — PORTO — 1997

Título da 4.ª edição do original

Н. С. ПИСКУНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ
И
ИНТЕГРАЛЬНОЕ
ИСЧИСЛЕНИЯ

ТОМ I

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

Dedicamos este nosso trabalho aos nossos queridos pais e irmãs e duma maneira geral aos familiares que mais de perto nos acompanham.

O tradutor dedica ainda esta tradução, em especial, aos queridos colegas Maria Luísa e José Alves Baptista que sempre o acompanharam nos seus estudos superiores, nas matérias versadas na presente obra e ainda a todos os queridos alunos, que directa ou indirectamente, contribuiram para a prossecução desta tradução.

OS TRADUTORES

À tradução desta segunda parte dedico-te, especialmente a ti, ROMAC.

O TRADUTOR

INDICE

CAPITULO XIII

Equações diferenciais

CAPITULO XIV

Integrais múltiplos

CAPÍTULO XV

Integrais curvilíneos e integrais de superfície

CAPÍTULO XVI

Séries

CAPÍTULO XVII

Séries de Fourier

CAPITULO XVIII

Equações da física matemática

CAPITULO XIX

Cálculo operacional e aplicações

PREFÁCIO

A 3.ª edição em língua francesa conserva como essencial o conteúdo da 2.ª edição. Certos capítulos foram profundamente revistos e completados, em especial aqueles que tratam de certos ramos das matemáticas modernas, cujo conhecimento é nos nossos dias indispensável a todo o engenheiro. Na parte «Exercícios» aumentou-se o número de problemas, insistindo sobre aqueles que, mais difíceis, exigem mais reflexão. O material desta nova edição é apresentado em dois volumes.

No primeiro volume, os capítulos iniciais «Número, variável, função» e «Limite e continuidade das funções» foram resumidos na medida do possível. Certas questões, habitualmente tratadas nestes capítulos, foram conscientemente reportadas aos capítulos seguintes. Isto permitiu abordar mais ràpidamente a derivada, noção fundamental do cálculo diferencial; esta necessidade foi-nos ditada pelas exigências das outras disciplinas do ensino técnico superior. O bom fundamento duma tal disposição foi felizmente confirmado pela experiência de vários anos.

No fim do primeiro volume inseriu-se os anexos I e II expondo problemas muito importantes para o engenheiro: «Estabelecimento duma dependência funcional a partir de dados experimentais pelo método dos mínimos quadrados» e «Fórmula de interpolação de Newton. Derivação numérica».

No segundo volume, para assegurar aos estudantes uma preparação matemática que lhes permita abordar as disciplinas ligadas à automação e aos métodos de cálculo automático, que são hoje ensinadas nos estabelecimentos de ensino técnico superior, vários desenvolvimentos, tratando em detalhe destas questões, foram inseridos: «Integração numérica das equações diferenciais e sistemas de equações diferenciais» (*), «Integração de sistemas diferenciais lineares», «Noção sobre a teoria da estabilidade de Liapounov», «Operador hamiltoniano», «Integral de Fourier», etc.

(*) Os métodos de cálculo numérico habitualmente tratados nos cursos de análise são igualmente expostos neste manual.

Esta edição foi também completada por dois novos capítulos «Equações da física matemática» (capítulo XVIII) e «Cálculo operacional e aplicações» (capítulo XIX).

O capítulo XVIII passa em revista as equações fundamentais da física matemática. Tem-se dado uma importância particular à análise da natureza dos fenómenos físicos que conduzem às equações de diferentes tipos e aos problemas de limites correspondentes. Uma grande importância foi igualmente concedida aos métodos numéricos de resolução das equações diferenciais às derivadas parciais.

No capítulo XIX expôs-se as noções fundamentais do cálculo operacional e o método operacional de resolução das equações diferenciais. Elas são indispensáveis para o estudo de numerosas disciplinas aplicadas, em especial as ligadas à electrotécnica.

Um grande número de problemas e de exercícios, que esclarecem a maior parte dos vínculos que existem entre as matemáticas e as outras disciplinas, foram incluídos neste manual. Os problemas e os exercícios foram especialmente escolhidos para cada capítulo do curso a fim de contribuir para a assimilação da parte teórica. Alguns foram resolvidos e comentados a título de exemplos. Isto torna o uso deste manual particularmente precioso para o estudo auto-didáctico.

Devo exprimir a minha profunda gratidão às Edições Mir que aceitaram a tradução e a publicação desta obra.

O autor

NOTA SOBRE A PRESENTE EDIÇÃO

Esta edição, a 4.ª em francês, reproduz a 3.ª, que se esgotou ràpidamente.

Procedemos, no entanto, às correcções que o autor julgara necessárias para esta nova edição, a fim de apresentar aos leitores uma obra ainda mais digna da sua confiança.

O EDITOR

Capítulo XIII

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

§ 1. Posição do problema. Equação do movimento do corpo para um meio em que a resistência é proporcional à velocidade. Equação da catenária

Suponhamos que a função $y = f(x)$ exprime um fenómeno do ponto de vista quantitativo. Examinando este fenómeno, é muitas vezes impossível estabelecer directamente o carácter da dependência entre y e x, mas pode-se estabelecer uma dependência entre as quantidades x, y e as derivadas de y em relação a x: y', y'', ..., $y^{(n)}$, isto é, que se pode escrever uma *equação diferencial.*

Deduzir da relação entre x, y e as derivadas a relação directa entre y e x, isto é, encontrar $y = f(x)$, é ainda o que se chama *integrar uma equação diferencial.*

Consideremos dois exemplos.

Exemplo — 1. Deixe-se cair um corpo de massa m duma certa altura. Pede-se para estabelecer a lei de variação da velocidade da queda v, se o corpo experimentar uma resistência de travagem da parte do ar proporcional à velocidade (sendo o coeficiente de proporcionalidade k), isto é, encontrar $v = f(t)$.

Resolução — Em virtude da segunda lei de Newton

$$m\frac{dv}{dt} = F,$$

em que $\frac{dv}{dt}$ é a aceleração do corpo em movimento (a derivada da velocidade em relação ao tempo) e F, a força que age sobre o corpo no sentido do movimento. Esta força é constituída por duas forças: pela força de gravidade mg e pela resistência do ar $= kv$ (toma-se o sinal menos porque esta força é oposta à velocidade). Assim

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv. \tag{1}$$

Temos uma relação entre a função desconhecida v e a sua derivada $\frac{dv}{dt}$, isto é, uma *equação diferencial* sobre a função desconhecida v. (É a equação do movimento de certos tipos de paraquedas). Resolver esta equação diferencial, é procurar uma função $v = f(t)$, que a verifica idênticamente. Existe uma infinidade de tais soluções. O leitor verificará fàcilmente que toda a função da forma

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \tag{2}$$

verifica a equação (1) qualquer que seja a constante C. Mas qual destas funções dá a relação procurada entre v e t? Para a encontrar, imponhamos uma condição suplementar: uma velocidade inicial v_0 (que, em especial, pode ser nula) foi comunicada ao corpo na partida; suporemos que esta velocidade inicial é conhecida, mas, então, a função procurada $v = f(t)$ deve ser tal que se tenha para $t = 0$ (no começo do movimento) $v = v_0$. Substituindo $t = 0$, $v = v_0$ na fórmula (2), tem-se:

$$v_0 = C + \frac{mg}{k},$$

donde

$$C = v_0 - \frac{mg}{k}.$$

Assim, a constante C é determinada. A dependência entre v e t, exprime-se, pois, por:

$$v = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}. \tag{2'}$$

Resulta desta fórmula que para t suficientemente grande a velocidade v depende pouco de v_0.

Notemos que se $k = 0$ (isto é, se a resistência do ar for nula ou desprezável) encontra-se o resultado conhecido em física (*):

$$v = v_0 + gt. \tag{2''}$$

Esta função satisfaz a equação diferencial (1) e à condição inicial: $v = v_0$ para $t = 0$.

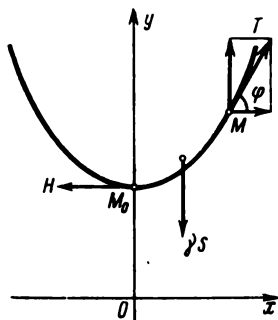
Fig. 244.

Exemplo — 2. Um fio flexível homogéneo está suspenso pelas suas duas extremidades. Achar a equação da curva de equilíbrio do fio submetido ao seu próprio peso (tal é a posição que tomam os cabos suspensos, os fios, as correntes).

Resolução — Sejam $M_0(0, b)$ o ponto mais baixo sobre o fio, M um ponto arbitrário sobre este fio (fig. 244). Consideremos a porção de fio M_0M. Esta porção está em equilíbrio sob a acção de três forças:

1) A tensão T, que age tangencialmente no ponto M e formando com o eixo Ox o ângulo φ;

2) A tensão H no ponto M_0, que age horizontalmente;

3) O peso γs dirigido verticalmente para baixo, em que s é o comprimento do arco M_0M, γ o peso específico do fio.

(*) Pode-se deduzir a fórmula (2') para passagem ao limite

$$\lim_{k\to 0}\left[\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}\right] = v_0 + gt.$$

Decompondo a tensão T nas suas componentes horizontal e vertical, obtém-se as equações de equilíbrio:

$$T \cos \varphi = H,$$
$$T \operatorname{sen} \varphi = \gamma s.$$

Obtém-se, dividindo membro a membro, estas duas igualdades

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\gamma}{H} s. \tag{3}$$

Suponhamos agora que se pode escrever a equação da curva procurada sob a forma $y = f(x)$. Aqui, $f(x)$ é uma função desconhecida que é preciso procurar. Notemos que

$$\operatorname{tg} \varphi = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Por conseguinte:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} s, \tag{4}$$

em que se fez $\frac{H}{\gamma} = a$.

Derivemos os dois membros da igualdade (4) em relação a x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{ds}{dx}.$$

Mas sabe-se que (ver § 1, Cap. VI)

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{5}$$

Substituindo esta expressão na equação (5), obtém-se a equação diferencial da curva procurada sob a forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{6}$$

Ela liga as derivadas primeira e segunda da função desconhecida y.

Sem nos preocuparmos com os métodos de resolução das equações, indiquemos que toda a função da forma

$$y = \frac{a}{2} \left[e^{+\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} + e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} \right] + C_2 \tag{7}$$

satisfaz à equação (6) quaisquer que sejam as constantes C_1 e C_2. É fácil de provar substituindo as derivadas primeira e segunda da função indicada na equação (6). Indiquemos ainda, sem o demonstrar, que se tem aí todas as soluções (para diversos C_1 e C_2) da equação (6). Isso será demonstrado no § 18.

Os gráficos das funções assim obtidas são chamadas *das catenárias.*

Vejamos agora como convém escolher as constantes C_1 e C_2 para obter precisamente a catenária cujo ponto inferior tem por coordenadas $(0, b)$. Dado que para $x = 0$ se tem o ponto mais baixo da catenária, a tangente é horizontal naquele ponto, isto é, $\frac{dy}{dx} = 0$. Além disso, por hipótese, a ordenada é igual a b nesse ponto, isto é, $y = b$.

Deduz-se da equação (7)

$$y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}+C_1}-e^{-\left(\frac{x}{a}+C_1\right)}\right).$$

Substituindo nesta última $x=0$, obtém-se $0=\frac{1}{2}(e^{C_1}-e^{-C_1})$. Logo $C_1=0$, se b é ordenada de M_0, tem-se, então, $y=b$ para $x=0$. Deduz-se da equação (7), pondo $x=0$ e 0_1 0, $b=\frac{a}{2}(1+1)+C_2$, donde $C_2=b-a$.

Encontra-se, por fim:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)+b-a.$$

A equação (7) simplifica-se muito se se fizer a ordenada do ponto M_0 igual a a. A equação da catenária torna-se, então, em:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

§ 2. Definições

Definição — 1. Chama-se *equação diferencial* a uma equação que estabelece uma relação entre a variável independente x, a função desconhecida $y=f(x)$ e suas derivadas y', y'', ..., $y^{(n)}$.

Pode-se escrever simbòlicamente uma equação diferencial como se segue:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$$

ou

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{{}^ny}{dx^n}\right)=0.$$

Se $y=f(x)$ é função de uma só variável independente, a equação diferencial diz-se *ordinária*. Começaremos pelo estudo das equações diferenciais ordinárias (*).

(*) Ao mesmo tempo que as equações diferenciais ordinárias, estuda-se igualmente em análise matemática equações com derivadas parciais. Chamam-se «*Equações com derivadas parciais*» a uma relação entre a função desconhecida z, que depende de duas ou várias variáveis x, y, ..., estas próprias variáveis e as derivadas parciais de z: $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}$, etc.

Tem-se como exemplo de equação de derivadas parciais de função desconhecida $z(x, y)$ a equação

$$x\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

É fácil de verificar que a função $z=x^2y^2$ (bem como muitas outras funções) verifica esta equação.

No decorrer deste curso as equações de derivadas parciais são estudadas no capítulo XVIII (vol. 2).

Definição — 2. Chama-se *ordem* duma equação diferencial à ordem da derivada mais elevada contida nessa equação.

Assim,

$$y' - 2xy^2 + 5 = 0$$

é uma equação de primeira ordem.

A equação

$$y'' + ky' - by - \operatorname{sen} x = 0$$

é uma equação de segunda ordem, etc.

A equação considerada no exemplo 1 do parágrafo precedente é uma equação de 1.ª ordem e a do exemplo 2 de segunda ordem.

Definição — 3. Chama-se *solução* ou *integral* duma equação diferencial a toda a função $y = f(x)$ que verifica idênticamente essa equação.

Exèmplo — 1. Seja a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

As funções $y = \operatorname{sen} x$, $y = 2\cos x$, $y = 3\operatorname{sen} x - \cos x$ e, mais geralmente, toda a função da forma $y = C_1 \operatorname{sen} x$, $y = C_2 \cos x$ ou

$$y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$$

é solução da equação dada quaisquer que sejam as constantes C_1 e C_2; é fácil de verificar, substituindo estas funções na equação.

Exemplo — 2. Consideremos a equação

$$y'x - x^2 - y = 0.$$

As suas soluções são funções da forma

$$y = x^2 + Cx,$$

em que C é uma constante arbitrária. Com efeito, encontra-se, derivando a função $y = x^2 + Cx$:

$$y' = 2x + C.$$

Substituindo as expressões de y e y' na equação dada, obtém-se a identidade

$$(2x + C)\,x - x^2 - x^2 - Cx = 0.$$

Cada uma das equações tratadas nos exemplos 1 e 2 possui uma infinidade de soluções.

§ 3. Equações diferenciais de primeira ordem (*noções gerais*)

1. *Uma equação diferencial de 1.ª ordem* é da forma

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

Quando esta equação é resolúvel em y', pode-se pô-la sob a forma

$$y' = f(x, y). \quad (1')$$

Diz-se, então, que a equação diferencial é resolúvel em relação à derivada. Tem-se para uma tal equação o teorema seguinte sobre a unicidade da solução.

Teorema — *Se na equação*

$$y' = f(x, y)$$

a função $f(x, y)$ e a sua derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ em relação a y forem contínuas num certo domínio D do plano Oxy e se (x_0, y_0) for um ponto deste domínio, existe uma solução única $y = \varphi(x)$ que satisfaz à condição $y = y_0$ quando $x = x_0$.

Geomètricamente, este teorema significa que existe uma função $y = \varphi(x)$, e uma só, cuja curva representativa passa pelo ponto (x_0, y_0).

Resulta deste teorema que a equação (1′) possui uma infinidade de soluções diferentes (por exemplo, a solução que passa pelo ponto (x_0, y_0); a solução que passa pelo ponto (x_0, y_1); a que passa pelo ponto (x_0, y_2), etc., uma vez que estes pontos se encontram no domínio D).

À condição para que a função y deva tomar o valor dado y_0 quando $x = x_0$ chama-se *condição inicial*. Muitas vezes escreve-se-la sob a forma

$$y|_{x=x_0} = y_0.$$

Definição — 1. Chama-se *solução geral* duma equação de 1.ª ordem a uma função

$$y = \varphi(x, C), \quad (2')$$

que depende duma constante arbitrária C e que satisfaz às seguintes condições:

a) satisfaz à equação diferencial qualquer que seja o valor concreto da constante C;

b) qualquer que seja a condição inicial $y = y_0$ quando $x = x_0$, isto é, $(y)_{x=x_0} = y_0$, pode-se determinar um valor $C = C_0$ tal que a função $y = \varphi(x, C_0)$ verifica a condição inicial dada. Supõe-se, então,

que os valores x_0 e y_0 pertencem ao domínio de variação das variáveis x e y no qual são observadas as condições do teorema de existência e da unicidade da solução.

2. Procurando a solução geral duma equação diferencial, somos conduzidos muitas vezes a uma relação da forma

$$\Phi(x, y, C) = 0, \qquad (2')$$

não resolvida em y. Obtém-se a solução geral resolvendo esta relação em relação a y. Todavia, não é sempre possível exprimir y a partir de (2′) por meio de funções elementares; conserva-se a solução geral sob a forma implícita. Uma igualdade da forma $\Phi(x, y, C) = 0$, que dá implìcitamente a solução geral, chama-se *integral geral* da equação diferencial.

Definição — 2. Chama-se *solução particular* a toda a função $y = \varphi(x, C_0)$ deduzida da solução geral $y = \varphi(x, C)$, pondo nesta última $C = C_0$. A relação $\Phi(x, y, C_0) = 0$ diz-se, então, um *integral particular* da equação.

Exemplo — 1. A equação de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

tem como solução geral $y = \frac{C}{x}$; pode-se verificá-la por uma simples substituição na equação.

Procuremos a solução particular que satisfaz às condições iniciais: $y_0 = 1$ quando $x_0 = 2$. Substituindo estes valores na fórmula $y = \frac{C}{x}$, obtém-se $1 = \frac{C}{2}$, ou seja, $C = 2$. A solução particular procurada é, pois, a função $y = \frac{2}{x}$.

Sob o ponto de vista geométrico, *o integral geral* representa uma *família de curvas* planas que dependem dum parâmetro C. Estas curvas chamam-se *curvas integrais* da curva diferencial dada. Um integral particular é representado por uma curva desta família que passa por um dado ponto do plano.

Assim, no exemplo considerado, o integral geral é representado geomètricamente pela família de hipérboles $y = \frac{C}{x}$ e o integral particular, definido pela condição inicial dada, pela hipérbole que passa pelo ponto $M_0(2, 1)$. Representou-se na figura 245 as curvas da família correspondentes aos diversos valores $C = \frac{1}{2}$, $C = 1$, $C = 2$, $C = -1$, etc.

Para facilitar os raciocínios, chamaremos no seguimento *solução da equação* não sòmente à função $y = \varphi(x, C_0)$ que satisfaz à equação proposta, mas ainda à *curva integral* correspondente. Sendo assim, falar-se-á, por exemplo, da *solução que passa pelo ponto* (x_0, y_0).

Nota — A equação $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ não admite solução que passe pelo ponto do eixo Oy (fig. 245). Tal deve-se ao facto de o segundo membro

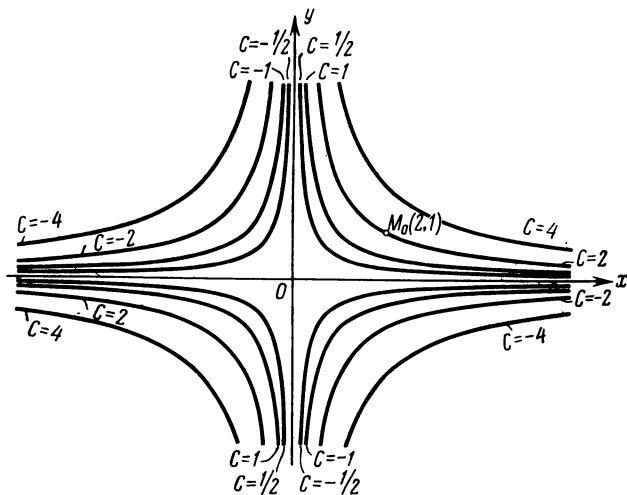



Fig. 245.

da equação ser indeterminado para $x = 0$ e, por conseguinte, não ser contínua.

Resolver ou *integrar* uma equação diferencial consiste em:

a) procurar uma solução geral ou o seu integral geral (se as condições iniciais não forem dadas) ou

b) procurar uma solução particular que satisfaça às condições iniciais (se as houver).

3. Demos a interpretação geométrica das equações diferenciais de primeira ordem.

Seja dada uma equação diferencial resolvida em relação à derivada:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1'}$$

e seja $y = \varphi(x, C)$ a sua solução geral. Esta solução geral define a família das curvas integrais no plano Oxy.

A equação (1') determina para todo o ponto M, de coordenadas x e y, um valor da derivada $\frac{dy}{dx}$, isto é, o coeficiente angular da tangente à curva integral que passa por esse ponto.

Por conseguinte, a equação diferencial (1') define um conjunto de direcções ou, como se disse, um *campo de direcções* no plano Oxy.

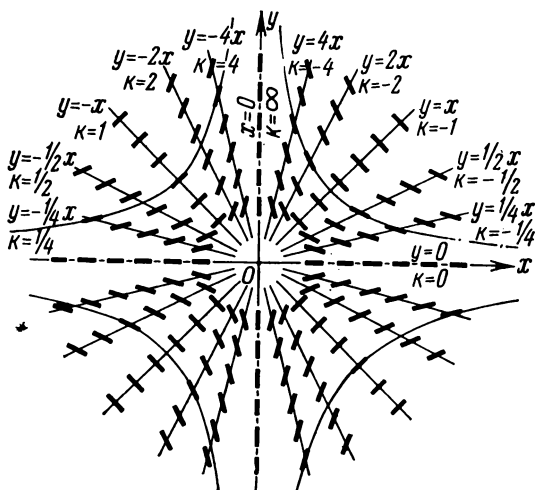



Fig. 246

Do ponto de vista geométrico, a integração duma equação diferencial consiste em encontrar as curvas cuja tangente em cada ponto se confunde com a direcção do campo nesse ponto.

Representou-se na figura 246 o campo de direcção definido pela equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

4. Consideremos, em seguida, o seguinte problema.

Seja dada uma família de curvas que dependem dum parâmetro C:

$$y = \varphi(x, C) \tag{2}$$

tal que para todo o ponto do plano (ou dum domínio no plano) apenas passe uma curva desta família.

Pergunta-se: qual a equação diferencial que admite esta família de funções para integral geral?

Acha-se derivando a relação (2) em relação a x:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'_x(x, C). \qquad (3)$$

Uma vez que apenas passa uma só curva da família para qualquer ponto do plano, cada par de valores z, y define um único valor C na equação (2). Substituindo este valor C na relação (3) encontra-se $\frac{dy}{dx}$ como função de x e y. Obtém-se, assim, uma equação diferencial que é verificada para todas as funções da família (2).

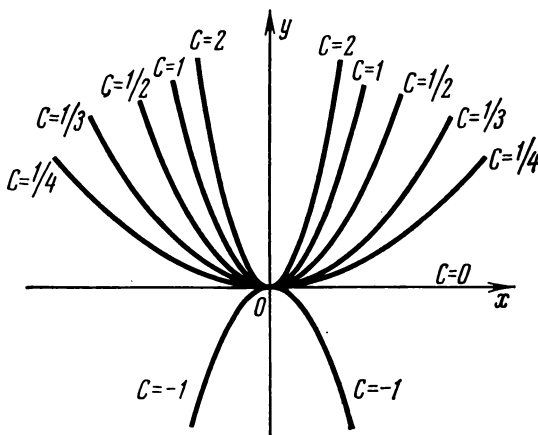



Fig. 247

Daqui resulta que para estabelecer a ligação entre x e y e $\frac{dy}{dx}$ isto é, para escrever a equação diferencial que admite para integral geral a fórmula (2), é preciso eliminar C nas expressões (2) e (3).

Exemplo — 2. Encontrar a equação diferencial da família de parábolas $y = Cx^2$ (fig. 247).

Acha-se derivando em relação a x a equação da família

$$\frac{dy}{dx} = 2Cx.$$

Substituindo $C = \frac{y}{x^2}$ definida pela equação da família, obtém-se a equação diferencial dada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Esta equação tem um sentido quando $x \neq 0$, isto é, em todo o domínio que não corte o eixo Oy.

§ 4. Equações com variáveis separadas e separáveis. Problema da desintegração do rádio

Consideremos uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y), \tag{1}$$

em que o segundo membro é o produto duma função que depende sòmente de x por uma função que depende sòmente de y. Transformemo-la como se segue (supondo $f_2(y) \neq 0$):

$$\frac{1}{f_2(y)} dy = f_1(x)\, dx. \tag{1'}$$

Supondo que a função y de x é conhecida, pode-se considerar (1'), como a igualdade de dois diferenciais, e as suas primitivas distinguir-se-ão duma constante. Integrando o primeiro membro em relação a y e o segundo em relação a x, obtém-se:

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x)\, dx + C.$$

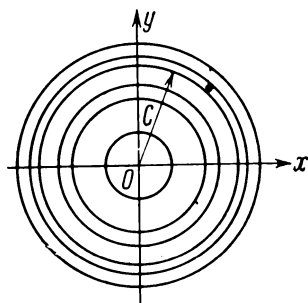



Fig. 248

Obtivemos uma relação entre a solução y, a variável independente x e a constante independente x e a constante arbitrária C, isto é, que se tem o integral geral da equação (1).

1. A equação diferencial (1')

$$M(x)\, dx + N(y)\, dy = 0 \tag{2}$$

chama-se equação *com variáveis separadas*. Como se acaba de demonstrar, o seu integral geral é

$$\int M(x)\, dx + \int N(y)\, dy = C.$$

Exemplo — 1. Seja a equação de variáveis separadas

$$x\, dx + y\, dy = 0.$$

O seu integral geral, é

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1.$$

O primeiro membro, não sendo negativo, implica o mesmo para o segundo. Designando $2C_1$, por C^2, ter-se-á:

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

É a equação de uma família de circunferências concêntricas (fig. 248) com centro na origem das coordenadas e de raio C.

2. Uma equação da forma

$$M_1(x)\,N_1(y)\,dx + M_2(x)\,N_2(y)\,dy = 0 \tag{3}$$

chama-se equação de *variáveis separáveis*. Pode-se reduzir a uma equação de variáveis separadas (*) dividindo os dois membros pela expressão $N_1(y)\,M_2(x)$:

$$\frac{M_1(x)\,N_1(y)}{N_1(y)\,M_2(x)}\,dx + \frac{M_2(x)\,N_2(y)}{N_1(y)\,M_2(x)}\,dy = 0$$

ou

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy = 0,$$

que é uma equação do tipo (2).

Exemplo — 2. Seja a equação

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

Separemos as variáveis:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Encontra-se, por integração:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C,$$

logo,

$$\operatorname{Log}|y| = -\operatorname{Log}|x| + \operatorname{Log}|C| \text{ (**) ou } \operatorname{Log}|y| = \operatorname{Log}\left|\frac{C}{x}\right|;$$

donde se deduz a solução geral $y = \dfrac{C}{x}$.

Exemplo — 3. Seja a equação

$$(1+x)\,y\,dx + (1-y)\,x\,dy = 0.$$

Separemos as variáveis:

$$\frac{1+x}{x}\,dx + \frac{1-y}{y}\,dy = 0;\quad \left(\frac{1}{x}+1\right)dx + \left(\frac{1}{y}-1\right)dy = 0$$

Integrando, obtém-se:

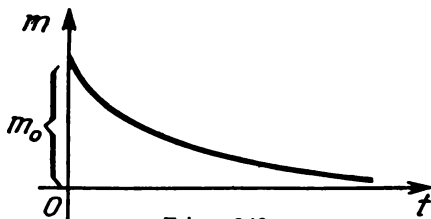
$$\operatorname{Log}|x| + x + \operatorname{Log}|y| - y = C \text{ ou } \operatorname{Log}|xy| + x - y = C$$

que é o integral geral da equação proposta.

(*) Estas transformações são legítimas sòmente num domínio em que, nem $N_1(y)$ nem $M_2(x)$ se anulem.

(**) Tendo em consideração as transformações ulteriores, designamos a constante arbitrária por $\log|C|$, o que é legítimo, porque $\log|C|$ (quando $C \neq 0$) pode tomar qualquer valor de $-\infty$ a $+\infty$.

Exemplo — 4. A velocidade de desintegração do rádio é directamente proporcional à sua massa no instante considerado. Determinar a lei de variação da massa do rádio em função do tempo, sabendo que no instante $t = 0$ a massa era m_0.

Determina-se a velocidade de desintegração como se segue. Seja m a massa no instante t e $m + \Delta m$ a massa no instante $t + \Delta t$. A massa desintegrada

F i g. 249.

no tempo Δt é Δm. A relação $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ é a velocidade média de desintegração. O limite desta relação quando $\Delta t \to 0$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

é a *velocidade de desintegração* no instante t.

Segundo as condições do problema

$$\frac{dm}{dt} = -km, \tag{4}$$

em que k é um coeficiente de proporcionalidade ($k > 0$). Introduzimos o sinal menos uma vez que a massa decresce quando o tempo cresce e que, por conseguinte, $\frac{dm}{dt} < 0$

A equação (4) é uma equação de variáveis separáveis. Separemos as variáveis:

$$\frac{dm}{m} = -k\,dt.$$

Integrando, obtém-se:

$$\operatorname{Log} m = -kt - \operatorname{Log} C,$$

donde

$$\operatorname{Log} \frac{m}{C} = -kt,$$

$$m = Ce^{-kt}. \tag{5}$$

Dado que a massa do rádio era m_0 no instante $t = 0$, C deve satisfazer à relação

$$m_0 = Ce^{-k \cdot 0} = C.$$

Substituindo o valor de C na igualdade (5), obtém-se a expressão procurada (ver fig. 249) da massa em função do tempo:

$$m = m_0 e^{-kt}. \tag{6}$$

Deduz-se o coeficiente k das observações que se seguem. Seja α % a fracção da massa inicial desintegrada no tempo t_0. Tem-se, pois, a relação

$$\left(1-\frac{\alpha}{100}\right) m_0 = m_0 e^{-kt_0},$$

donde

$$-kt_0 = \operatorname{Log}\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)$$

ou

$$k = -\frac{1}{t_0}\operatorname{Log}\left(1-\frac{\alpha}{100}\right).$$

Desta maneira estabeleceu-se que para a rádio $k = 0{,}000436$ (sendo a unidade do tempo o ano).

Substituindo este valor de k na fórmula (6), obtém-se

$$m = m_0 e^{-0{,}000436t}.$$

Encontramos o período de desintegração do rádio, isto é, o lapso de tempo durante o qual se desintegra metade da massa inicial do rádio. Substituindo nesta última fórmula $\frac{m_0}{2}$ em vez de m, obtém-se a equação que define o período T procurado:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-0{,}000436T},$$

donde

$$-0{,}000436T = -\operatorname{Log} 2$$

ou

$$T = \frac{\operatorname{Log} 2}{0{,}000436} = 1590 \text{ anos.}$$

Notemos que outros problemas da física e da química igualmente conduzem à equação da fórmula (4).

Nota — A equação diferencial de variáveis separadas mais simples é:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{ou} \quad dy = f(x)\,dx.$$

O seu integral geral, escreve-se

$$y = \int f(x)\,dx + C.$$

Ocupamo-nos deste tipo de equação no capítulo X.

§ 5. Equações homogéneas de primeira ordem

Definição — 1. Diz-se que a função $f(x, y)$ é uma *função homogénea de grau n* em relação às variáveis x e y se se tiver para todo o λ

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Exemplo — 1. A função $f(x, y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ é homogénea e de grau 1, porque

$$f(\lambda x, \lambda y)=\sqrt[3]{(\lambda x)^3+(\lambda y)^3}=\lambda\sqrt[3]{x^3+y^3}=\lambda f(x, y).$$

Exemplo — 2. $f(x, y)=xy-y^2$ é uma função homogénea do segundo grau, porque $(\lambda x)(\lambda y)-(\lambda y)^2=\lambda^2[xy-y^2]$.

Exemplo — 3. $f(x, y)=\dfrac{x^2-y^2}{xy}$ é uma função homogénea de grau zero, porque $\dfrac{(\lambda x)^2-(\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)}=\dfrac{x^2-y^2}{xy}$, isto é, $f(\lambda x, \lambda y)=f(x, y)$ ou $f(\lambda x, \lambda y)=$ $=\lambda^0 f(x, y)$.

Definição — 2. A equação de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{1}$$

diz-se *homogénea* em relação a x e y se a função $f(x, y)$ for uma função homogénea de grau zero em relação a x e y.

Resolução da equação homogénea — Tem-se, por hipótese, $f(\lambda x, \lambda y)=f(x, y)$. Fazendo nesta identidade $\lambda=\dfrac{1}{x}$, obtém-se:

$$f(x, y)=f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

isto é, que uma função homogénea de grau zero depende sòmente da relação $\dfrac{y}{x}$.

A equação (1) escreve-se, então, neste caso, sob a forma

$$\frac{dy}{dx}=f\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{1'}$$

Façamos a substituição:

$$u=\frac{y}{x}, \qquad \text{isto é,} \qquad y=ux.$$

Tem-se, então:

$$\frac{dy}{dx}=u+\frac{du}{dx}x.$$

Substituindo esta expressão da derivada na equação (1'), obtém-se

$$u+x\frac{du}{dx}=f(1, u).$$

É uma equação de variáveis separáveis:

$$x\frac{du}{dx}=f(1,\ u)-u \quad \text{ou} \quad \frac{du}{f(1,\ u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Por integração encontra-se

$$\int\frac{du}{f(1,\ u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C.$$

Substituindo após integração $\frac{y}{x}$ em u, obtém-se o integral da equação (1′).

Exemplo — 4. Seja a equação

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^2}.$$

Tem-se no segundo membro uma equação homogénea de grau zero, pois a equação proposta é homogénea. Façamos a mudança de variáveis $\frac{y}{x}=u$. Então:

$$y=ux\,; \quad \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}\,;$$

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^2}\,; \quad x\frac{du}{dx}=\frac{u^3}{1-u^2}.$$

Separando as variáveis, tem-se:

$$\frac{(1-u^2)\,du}{u^3}=\frac{dx}{x}\,; \quad \left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u}\right)du=\frac{dx}{x},$$

e por integração:

$$-\frac{1}{2u^2}-\text{Log}\,|\,u\,|=\text{Log}\,|\,x\,|+\text{Log}\,|\,C\,| \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{2u^2}\,\text{Log}\,|\,uxC\,|.$$

Substituindo $u=\frac{y}{x}$, obtém-se o integral geral da equação inicial:

$$-\frac{x^2}{2y^2}=\text{Log}\,|\,Cy\,|.$$

É impossível exprimir aqui y em função de x por meio das funções elementares. Mas exprime-se fàcilmente x em função de y:

$$x=y\sqrt{-2\,\text{Log}\,|\,Cy\,|}.$$

Nota — A equação

$$M(x,\ y)\,dx+N(x,\ y)\,dy=0$$

apenas será homogénea se $M(x,\ y)$ e $N(x,\ y)$ forem funções homogéneas do mesmo grau. Daqui resulta que a relação de duas funções homogéneas dum único e mesmo grau é uma função homogénea de grau zero.

Exemplo — 5. As equações

$$(2x+3y)\,dx+(x-2y)\,dy=0,$$
$$(x^2+y^2)\,dx-2xy\,dy=0$$

são homogéneas.

§ 6. Equações redutíveis a equações homogéneas

Reduzem-se a equações homogéneas as equações da forma

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1} \tag{1}$$

Se $c_1 = c = 0$, a equação (1) é, evidentemente, homogénea. Suponhamos agora que c e c_1 (ou um deles) não são nulos. Façamos a mudança de variáveis:

$$x=x_1+h, \qquad y=y_1+k.$$

Então,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx_1}. \tag{2}$$

Substituindo na equação (2) as expressões das quantidades x, y, obtém-se:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1+ah+bk+c}{a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c_1}. \tag{3}$$

Escolhamos h e k de maneira que verifiquem as equações

$$\left.\begin{aligned} ah+bk+c&=0,\\ a_1h+b_1k+c_1&=0,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

isto é, definamos h e k de modo que seja solução do sistema de equações (4).

A equação (3) torna-se, então, homogénea:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}.$$

Resolvendo esta equação e voltando às antigas variáveis x e y segundo as fórmulas (2), obtém-se a solução da equação (1).

O sistema (4) não tem solução quando

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0,$$

isto é, quando $ab_1 = a_1b$. Mas, então, $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$ ou $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$, e a equação (1) pode ser posta sob a forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax + by) + c}{\lambda (ax + by) + c_1}. \tag{5}$$

A substituição

$$z = ax + by \tag{6}$$

conduz, então, a equação dada a uma equação de variáveis separáveis.

Com efeito.

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx},$$

donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}. \tag{7}$$

Substituindo as expressões (6) e (7) na equação (5), obtém-se

$$\frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z + c}{\lambda z + c_1}$$

que é uma equação de variáveis separáveis.

O processo utilizado para integrar a equação (1) aplica-se igualmente à integração da equação

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right),$$

em que f é uma função arbitrária contínua.

Exemplo — 1. Seja a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}.$$

Para a reduzir a uma equação homogénea façamos a substituição $x = x_1 + h$; $y = y_1 + k$. Então,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + h + k - 3}{x_1 - y_1 + h - k - 1}.$$

Resolvendo o sistema de duas equações

$$h + k - 3 = 0 \; ; \quad h - k - 1 = 0,$$

vem.

$$h = 2, \; k = 1.$$

Obtém-se assim a equação homogénea

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$$

que se resolve fazendo a substituição

$$\frac{y_1}{x_1} = u;$$

tem-se:

$$y_1 = ux_1; \quad \frac{dy_1}{dx_1} = u + x_1 \frac{du}{dx_1};$$

$$u + x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u}{1-u},$$

e obtém-se uma equação de variáveis separáveis:

$$x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u^2}{1-u}.$$

Separemos as variáveis:

$$\frac{1-u}{1+u^2}\, du = \frac{dx_1}{x_1}.$$

Integrando, tem-se:

$$\text{arc tg}\, u - \frac{1}{2} \text{Log}\,(1+u^2) = \text{Log}\, x_1 + \text{Log}\, C,$$

$$\text{arc tg}\, u = \text{Log}\,(Cx_1 \sqrt{1+u^2})$$

ou

$$Cx_1 \sqrt{1+u^2} = e^{\text{arctg}\, u}.$$

Substituindo nesta última igualdade $\frac{y_1}{x_1}$ em vez de u, obtém-se:

$$C \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{\text{arctg} \frac{y_1}{x_1}}.$$

Por fim, passando às variáveis x e y, obtém-se:

$$C \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{\text{arctg} \frac{y-1}{x-2}}.$$

Exemplo — 2. Não se pode fazer a substituição $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$ na equação

$$y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5},$$

porque o sistema de equação que serve para definir h e k é incompatível (sendo o determinante $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ dos coeficientes das variáveis nulo).

Pode reduzir-se esta equação a uma equação de variáveis separáveis fazendo a substituição ;

$$2x + y = z.$$

Tem-se, então, $y' = z' - 2$ e a equação torna-se

$$z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5}$$

ou

$$z' = \frac{5z+9}{2z+5}$$

Deduz-se

$$\frac{2}{5}z+\frac{7}{25}\operatorname{Log}|5z+9|=x+C.$$

Como $z = 2x + y$ obtém-se, finalmente, a solução da equação dada sob a forma

$$\frac{2}{5}(2x+y)+\frac{7}{25}\operatorname{Log}|10x+5y+9|=x+C$$

ou

$$10y-5x+7\operatorname{Log}|10x+5y+9|=C_1,$$

isto é, sob a forma implícita.

§ 7. Equações lineares de primeira ordem

Definição — Chama-se *equação linear de primeira ordem* a uma equação linear em relação à função desconhecida e à sua derivada. Escreve-se

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x), \tag{1}$$

em que $C(x)$ e $Q(x)$ são funções contínuas de x dadas (ou constantes).

Resolução da equação linear (1) — Vamos procurar a solução da equação (1) sob a forma de produto de duas funções de x:

$$y=u(x)\,v(x) \tag{2}$$

Poder-se-á tomar arbitràriamente uma destas funções; a outra será, então, definida por (1).

Derivando os dois membros da igualdade (2) encontra-se:

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$$

Substituindo a expressão da derivada $\frac{dy}{dx}$ obtida na equação (1), ter-se-á

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+Puv=Q$$

ou

$$u\left(\frac{dv}{dx}+Pv\right)+v\frac{du}{dx}=Q. \tag{3}$$

Escolhamos a função v de modo que se tenha

$$\frac{dv}{dx}+Pv=0. \tag{4}$$

Separando as variáveis nesta equação diferencial em v, tem-se:

$$\frac{dv}{v} = -P\,dx.$$

Integrando, obtém-se

$$-\operatorname{Log} C_1 + \operatorname{Log} v = -\int P\,dx$$

ou

$$v = C_1 e^{-\int P\,dx}$$

Como nos basta ter uma solução qualquer não nula da equação (4), tomaremos para função $v(x)$:

$$v(x) = e^{-\int P\,dx}, \tag{5}$$

em que $\int P\,dx$ é uma primitiva qualquer. É evidente que $v(x) \neq 0$. Substituindo o valor encontrado de $v(x)$ na equação (3), obtém-se tendo em atenção que $\left.\frac{dv}{dx} + Pv = 0\right)$:

$$v(x)\frac{du}{dx} = Q(x)$$

ou

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)},$$

donde

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + C.$$

Substituindo na fórmula (2), obtém-se, finalmente:

$$y = v(x)\left[\int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + C\right]$$

$$y = v(x)\int \frac{Q(x)}{v(x)}\,dx + Cv(x). \tag{6}$$

Nota — É evidente que a expressão (6) não muda se se tomar em vez da função $v(x)$ definida por (5) uma função qualquer $v_1(x) = Cv(x)$

Com efeito, obtém-se, substituindo $v_1(x)$ em vez de $v(x)$:

$$y = \bar{C}v(x) \int \frac{Q(x)}{\bar{C}v(x)} dx + C\bar{C}v(x).$$

$\bar{C}$ desaparece do primeiro termo do segundo membro; o produto $C\bar{C}$ do segundo termo é uma constante arbitrária que se pode designar simplesmente por C, e voltamos a encontrar a expressão (6). Se se fizer $\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx = \varphi(x)$, a equação (6) toma a forma

$$y = v(x)\,\varphi(x) + Cv(x). \qquad (6')$$

É evidente que se está no integral geral, porque se pode escolher C de maneira que seja satisfeita a condição inicial:

$$y = y_0 \quad \text{quando} \quad x = x_0.$$

C é determinado pela equação

$$y_0 = v(x_0)\,\varphi(x_0) + Cv(x_0).$$

Exemplo — Resolver a equação

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}\,y = (x+1)^3.$$

Resolução — Façamos $y = uv$; tem-se

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v.$$

Substituindo a expresão $\frac{dy}{dx}$ na equação dada, obtém-se:

$$u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3,$$

$$u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v\right) + v\frac{du}{dx} = (x+1)^3. \qquad (7)$$

Para a determinação de v, obtém-se a equação

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v = 0,$$

isto é,

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1},$$

donde

$$\operatorname{Log} v = 2 \operatorname{Log}(x+1)$$

ou

$$v = (x+1)^2.$$

Substituindo a expressão da função v na equação (7), obtém-se pela determinação de u, a equação

$$(x+1)^2 \frac{du}{dx} = (x+1)^3$$

$$\frac{du}{dx} = (x+1),$$

donde

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Por conseguinte, o integral geral da equação dada escreve-se

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + C\,(x+1)^2.$$

A família obtida é a solução geral. Qualquer que seja a condição inicial (x_0, y_0) em que $x_0 \neq -1$, pode-se escolher sempre C de modo que a solução particular correspondente satisfaça à condição inicial dada. Assim, a solução particular que satisfaz à condição $y_0 = 3$ para $x_0 = 0$ é definida como se segue:

$$3 = \frac{(0+1)^4}{2} + C\,(0+1)^2;$$

$$C = \frac{5}{2}.$$

Por conseguinte, a solução particular procurada é

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{5}{2}(x+1)^2.$$

Todavia, se se toma a condição inicial (x_0, y_0) de modo que $x_0 = -1$, não se pode deduzir uma solução particular que satisfaça a esta condição. Tal deve-se ao facto da função $P(x) = -\frac{2}{x+1}$ ser descontínua no ponto $x_0 = -1$ e as condições do teorema da existência da solução não serem observadas.

§ 8. Equação de Bernoulli

Consideremos uma equação da forma (*)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^n, \qquad (1)$$

em que $P(x)$ e $Q(x)$ são funções contínuas de x (ou constantes) e $n \neq 0$, $n \neq 1$ (caso contrário não se teria uma equação linear).

(*) Nesta equação se conduz o problema sobre o movimento do corpo se a resistência do meio F depender da velocidade: $F = \lambda_1 v + \lambda_2 v^n$.

A equação do movimento será, então,

$$m\,\frac{dv}{dt} = -\lambda_1 v - \lambda_2 v^n \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{\lambda_1}{m} v = -\frac{\lambda_2}{m} v^n.$$

Esta equação que se chama *equação de Bernoulli*, reduz-se a uma equação pela seguinte transformação.

Dividindo todos os termos da equação por y^n, obtém-se:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{-n+1}=Q. \tag{2}$$

Façamos, em seguida, a substituição:

$$z=y^{-n+1}.$$

Então,

$$\frac{dz}{dx}=(-n+1)\,y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Substituindo na equação (2), obtém-se:

$$\frac{dz}{dx}+(-n+1)\,Pz=(-n+1)\,Q.$$

É uma equação linear.

Calculando o seu integral geral e substituindo em z a sua expressão y^{-n+1}, obtém-se o integral geral da equação de Bernoulli.

Exemplo — Resolver a equação

$$\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3. \tag{3}$$

Resolução — Dividindo todos os termos por y^3, obtém-se:

$$y^{-3}y'+xy^{-2}=x^3. \tag{4}$$

Introduzamos a nova função $z=y^{-2}$.
Tem-se, então,

$$\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}.$$

Substituindo na equação (4), obtém-se:

$$\frac{dz}{dx}-2xz=-2x^3. \tag{5}$$

É uma equação linear.
Achemos o seu integral geral:

$$z=uv\,;\qquad \frac{dz}{dx}=u\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}v.$$

Substituámos na equação (5) as expressões de z e de $\frac{dz}{dx}$:

$$u\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}v-2xuv=-2x^3$$

ou

$$u\left(\frac{dv}{dx}-2xv\right)+v\frac{du}{dx}=-2x^3.$$

Anulemos a expressão entre parêntesis:

$$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0; \quad \frac{dv}{v} = 2x\,dx;$$

$$\text{Log}\, v = x^2; \quad v = e^{x^2}.$$

Obtém-se, para definir u, a equação

$$e^{x^2} \frac{du}{dx} = -2x^3.$$

Separemos as variáveis:

$$du = -2e^{-x^2} x^3\,dx, \quad u = -2 \int e^{-x^2} x^3\,dx + C.$$

Integrando por partes, vem

$$u = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C;$$

$$z = uv = x^2 + 1 + Ce^{x^2}.$$

Tem-se pois o integral geral da equação dada:

$$y^{-2} = x^2 + 1 + Ce^{x^2} \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + Ce^{x^2}}}.$$

Nota — Tal como para as equações lineares, demonstra-se que se pode encontrar a solução da equação de Bernoulli sob a forma de produto de duas funções:

$$y = u(x)\,v(x),$$

onde $v(x)$ é uma função arbitrária não nula, que satisfaz à equação

$$v' + Pv = 0.$$

§ 9. Equações de diferenciais totais

Definição — A equação

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

chama-se *equação de diferencais totais* se, $M(x, y)$ e $N(x, y)$ forem funções contínuas deriváveis tais que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \tag{2}$$

e as derivadas parciais $\frac{\partial M}{\partial y}$ e $\frac{\partial N}{\partial x}$ sejam contínuas num certo domínio.

Integração de diferenciais totais — Mostremos que se o primeiro membro da equação (1) for um diferencial total, a condição (2) é

observada, e inversamente, se a condição (2) for observada, o primeiro membro da equação (1) é o diferencial total duma certa função $u(x, y)$, isto é, que a equação (1) é da forma

$$du(x, y) = 0 \tag{3}$$

cujo integral geral é da forma

$$u(x, y) = C.$$

Em primeiro lugar suponhamos que o primeiro membro da equação (1) é o diferencial total duma certa função $u(x, y)$, isto é,

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy;$$

então,

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4}$$

Derivando a primeira relação em ordem a y e a segunda em ordem a x, obtém-se:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}.$$

Supondo que as derivadas segundas são contínuas, tem-se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

isto é, que a igualdade (2) é uma condição *necessária* para que o primeiro membro da equação (1) seja o diferencial total duma certa função $u(x, y)$. Mostrêmos que esta condição é também suficiente, isto é, que se as igualdade (2) tiverem lugar, o primeiro membro da equação (1) é o diferencial total duma certa função $u(x, y)$.

Da relação

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$$

deduz-se:

$$u = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \varphi(y),$$

em que x_0 é a abcissa dum ponto arbitrário no domínio de existência da solução.

Integrando em relação a x, suponhamos y constante, e, por conseguinte, a constante de integração é substituída aqui por uma função $\varphi(y)$ de modo que seja observada a segunda relação de (4).

Para este efeito, derivemos (*) os dois membros da última igualdade em relação a y e igualemos o resultado a $N(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Mas como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, pode-se escrever:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N, \quad \text{isto é,} \quad N(x, y)\Big|_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = N(x, y,)$$

ou

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Por conseguinte,

$$\varphi'(y) = N(x_0, y)$$

ou

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\, dy + C_1.$$

Consequentemente, a função $u(x, y)$ será da forma

$$u = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\, dy + C_1.$$

$P(x_0, y_0)$ representa aqui um ponto na vizinhança do qual existe a solução da equação diferencial (1).

Igualando esta expressão a uma constante arbitrária C, obtém-se o integral geral da equação (1):

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\, dy = C. \qquad (5)$$

(*) O integral $\int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx$ depende de y. Para encontrar a derivada deste integral em relação a y, é preciso derivar em relação a y a função sob o sinal soma:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx.$$

Isto resulta do teorema de Leibnitz sobre a derivação dum integral definido em relação a um parâmetro (ver § 10, capítulo XI).

Exemplo — Seja a equação

$$\frac{2x}{y^3}\,dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}\,dy=0.$$

certifiquemo-nos de que se trata de um diferencial total.

Designemos

$$M=\frac{2x}{y^3}; \quad N=\frac{y^2-3x^2}{y^4};$$

então,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{6x}{y^4}; \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{6x}{y^4}.$$

A condição (2) é observada para $y\neq 0$. O primeiro membro da equação dada é, pois, o diferencial total duma certa função $u(x, y)$. Procuremos essa função.

Como $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y^3}$, tem-se

$$u=\int\frac{2x}{y^3}\,dx+\varphi(y)=\frac{x^2}{y^3}+\varphi(y),$$

em que $\varphi(y)$ é uma função de y que é preciso determinar.

Derivemos esta relação em ordem a y e tenhamos em consideração que

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N=\frac{y^2-3x^2}{y^4}.$$

Tem-se

$$-\frac{3x^2}{y^4}+\varphi'(y)=\frac{y^2-3x^2}{y^4};$$

por conseguinte,

$$\varphi'(y)=\frac{1}{y^2}, \quad \varphi(y)=-\frac{1}{y}+C_1,$$

$$u(x, y)=\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}+C_1.$$

Logo, o integral geral da equação proposta é

$$\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C.$$

§ 10. Factor integrante

Suponhamos que o primeiro membro da equação

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0 \tag{1}$$

não é um diferencial total. Por vezes é possível escolher uma função $\mu(x, y)$ tal, que se se multiplicar o primeiro membro da equação proposta por esta função, este primeiro membro se transforma num diferencial total. A solução geral da equação assim obtida coincide com a solução geral da equação proposta; a função $\mu(x, y)$ diz-se um *factor integrante* da equação (1).

Para encontrar um factor integrante μ, procede-se como se segue; multipliquemos os dois membros da equação dada pelo factor integrante, ainda desconhecido, μ:

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0.$$

Para que esta última equação seja uma equação de diferenciais totais, é necessário e suficiente que se tenha:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

isto é,

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x},$$

ou ainda

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Obtém-se, calculando o quociente dos dois membros desta última equação por μ:

$$M\frac{\partial \operatorname{Log}\mu}{\partial y} - N\frac{\partial \operatorname{Log}\mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \qquad (2)$$

É evidente que qualquer $\mu(x, y)$ que satisfaça a esta última equação é um factor integrante da equação (1). A equação (2) é uma equação de derivadas parciais da função desconhecida μ que depende de duas variáveis x e y. Demonstra-se que, nas condições determinadas, ela possui uma infinidade de soluções e resulta que a equação (1) tem um factor integrante. Mas no caso geral, é mais difícil de determinar $\mu(x, y)$ em (2) do que integrar a equação proposta (1). É sòmente nestes dois casos particulares que se chega a determinar a função $\mu(x, y)$.

Suponhamos, por exemplo, que a equação (1) admite um factor integrante *dependente sòmente de* y. Então,

$$\frac{\partial \operatorname{Log}\mu}{\partial x} = 0$$

e obtém-se para μ uma equação diferencial *ordinária:*

$$\frac{\partial \operatorname{Log}\mu}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M},$$

donde se determina (para uma quadratura) Log μ e portanto μ. É claro que se não pode proceder assim se a expressão

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

não depender de x.

Duma maneira análoga, se a expressão $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{N}$ não depender de y mas sòmente de x encontra-se fàcilmente o factor integrante que *depende sòmente de x*.

Exemplo — Resolver a equação

$$(y+xy^2)\,dx-x\,dy=0.$$

Resolução — Aqui $M=y+xy^2$; $N=-x$;

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1+2xy\,; \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-1\,; \quad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

Daí resulta que o primeiro membro da equação não é um diferencial total. Vejamos se esta equação admite um factor integrante, dependente sòmente de y. Tendo em atenção que

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{-1-1-2xy}{y+xy^2}=-\frac{2}{y}\,,$$

conclui-se que de facto assim é. Achemo-lo:

$$\frac{\partial \operatorname{Log}\mu}{\partial y}=-\frac{2}{y}\,,$$

donde

$$\operatorname{Log}\mu=-2\operatorname{Log}y,\ \text{soit}\ \mu=\frac{1}{y^2}\,.$$

Obtém-se, após multiplicação de todos os termos da equação proposta pelo factor integrante μ, a equação

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}\,dy=0$$

de diferenciais totais $\left(\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}\right)$. Resolvendo esta equação, encontra-se o seu integral geral:

$$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}+C=0$$

ou

$$y=-\frac{2x}{x^2+2C}\,.$$

§ 11. Envoltório duma família de curvas

Seja uma equação da forma

$$\Phi(x, y, C)=0, \tag{1}$$

em que x e y são as coordenadas cartesianas variáveis e C um parâmetro susceptível de tomar diversos valores fixos.

Para cada valor dado do parâmetro C, a equação (1) define uma certa *curva* no plano Oxy. Dando a C todos os valores possíveis, obte-

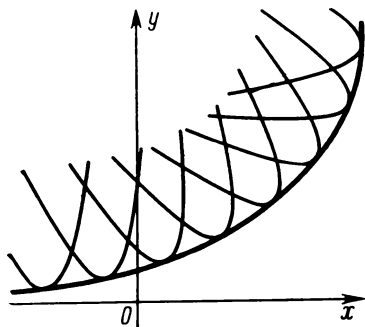



Fig. 250.

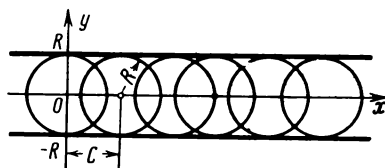



Fig. 251.

mos uma *família de curvas* dependentes dum parâmetro. Por conseguinte, a equação (1) é a equação duma família de curvas dependente dum parâmetro (ela contém sòmente um parâmetro arbitrário).

Definição — Chama-se *envoltório* L duma família de curvas com um parâmetro, a uma curva tangente em cada um dos seus pontos a uma curva da família (fig. 250).

Exemplo — 1. Consideremos a família de curvas

$$(x-C)^2+y^2=R^2,$$

em que R é uma constante e C um parâmetro.

É a equação duma família de círculos de raio R centrados sobre o eixo Ox. É evidente que esta família admite como envoltório as rectas $y=R$, $y=-R$ (fig. 251).

Equação do envoltório duma família de curvas. Seja a família de curvas

$$\Phi(x, y, C)=0 \tag{1}$$

dependente dum parâmetro C.

Suponhamos que esta família tem um envoltório cuja equação pode ser posta sob a forma $y=\varphi(x)$, sendo $\varphi(x)$ uma função contínua

derivável. Consideremos um ponto $M(x, y)$ do envoltório. Este ponto pertence também a uma certa curva da família (1). Corresponde a esta curva um determinado valor do parâmetro C que, para (x, y) dado, é definido pela equação (1) $C = C(x, y)$. Por conseguinte, tem-se para todos os pontos do envoltório a igualdade

$$\Phi(x, y, C(x, y)) = 0. \tag{2}$$

Suponhamos que $C(x, y)$ é uma função derivável não constante em nenhum intervalo dos valores de x, y considerados. Calculemos a partir da equação (2) do envoltório o coeficiente angular da tangente ao envoltório no ponto $M(x, y)$. Derivemos a igualdade (2) em relação a x, considerando y como função de x:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial x} + \left[\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial y}\right] y' = 0$$

ou

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' + \Phi'_C \left[\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y'\right] = 0. \tag{3}$$

Deduz-se, em seguida, o coeficiente angular da tangente no ponto $M(x, y)$ à curva da família (1) da igualdade

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' = 0 \tag{4}$$

(C é constante na curva dada).

Suporemos $\Phi'_y \neq 0$, senão tomaríamos x como função e y como variável. Dado que o coeficiente angular k do envoltório é igual ao da curva da família, deduz-se de (3) e (4):

$$\Phi'_C \left[\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y'\right] = 0.$$

Mas como para o envoltório $C(x, y) \neq$ constante,

$$\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} y' \neq 0,$$

e tem-se, pois, para os pontos desta última

$$\Phi'_C(x, y, C) = 0. \tag{5}$$

Por conseguinte, determina-se o envoltório pelas duas equações seguintes:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Inversamente, se, eliminando C destas equações, se obtém $y = \varphi(x)$, em que $\varphi(x)$ é uma função derivável e $C \neq$ constante sobre esta curva, então $y = \varphi(x)$ é a equação do envoltório.

Nota — 1. Se uma certa função $y = \varphi(x)$ representa o lugar geométrico dos *pontos singulares* da família (1), isto é, pontos tais que $\Phi'_x = 0$ e $\Phi'_y = 0$, as coordenadas destes pontos verificam igualmente as equações (6).

Com efeito, pode-se exprimir as coordenadas dos pontos singulares em função do parâmetro C que entra na equação (1):

$$x = \lambda(C), \qquad y = \mu(C). \tag{7}$$

Se se substituir ests expressões na equação (1), obtem-se uma identidade em C:

$$\Phi[\lambda(C),\ \mu(C),\ C] = 0.$$

Derivando esta identidade em relação a C, obtém-se:

$$\Phi'_x \frac{d\lambda}{dC} + \Phi'_y \frac{d\mu}{dC} + \Phi'_C = 0;$$

como se tem, qualquer que seja o ponto singular, as igualdades $\Phi'_x = 0$, $\Phi'_y = 0$, resulta que se tem também para estes pontos $\Phi'_C = 0$.

Acabamos, pois, de demonstrar que as coordenadas dos pontos singulares verificam as equações (6).

Assim, as equações (6) definem quer o envoltório quer o lugar geométrico dos pontos singulares das curvas da família (1), quer uma combinação duma e doutra. Por conseguinte, tendo obtida uma curva que satisfaça às equações (6), importa fazer um estudo especial para determinar se a curva obtida é o envoltório, ou melhor, um lugar de pontos singulares.

Exemplo — 2. Encontrar o envoltório da família dos círculos dependentes dum parâmetro C

$$(x-C)^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Resolução — Derivando obtém-se a equação da família em relação a C:

$$2(x-C) = 0.$$

Eliminando C nestas duas equações, obtém-se:

$$y^2 - R^2 = 0 \text{ ou } y = \pm R.$$

Resulta de considerações geométricas que o par de rectas obtidas é bem o envoltório (e não um lugar de pontos singulares, dado que os círculos da família não têm pontos singulares).

Exemplo — 3. Achar o envoltório da família de rectas:

$$x \cos\alpha + y \cdot \operatorname{sen}\alpha - p = 0, \tag{a}$$

em que α é o parâmetro.

Resolução — Encontra-se derivando em relação a α, a equação da família

$$-x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha = 0. \qquad (b)$$

Para eliminar o parâmetro α das equações (a) e (b), multipliquemos a primeira por $\cos \alpha$, a segunda por $\operatorname{sen} \alpha$ e juntemo-las membro a membro. Obtém-se:

$$x = p \cos \alpha.$$

Encontra-se, substituindo esta expressão na igualdade (b):

$$y = p \operatorname{sen} \alpha.$$

Elevemos ao quadrado os dois membros das equações precedentes e juntemo-los. Tem-se:

$$x^2 + y^2 = p^2.$$

É a equação de um círculo. Este círculo é o envoltório da família de rectas (e não um lugar de pontos singulares, porque as rectas não têm singularidade) (fig. 252).

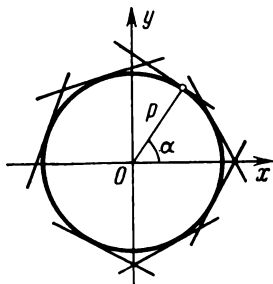



Fig. 252

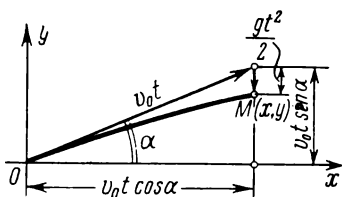



Fig. 253

Exemplo — 4. Achar o envoltório das trajectórias dos projécteis lançados por um canhão à velocidade v_0 sob ângulos diferentes. Supõe-se que os projécteis são lançados da origem das coordenadas e que as suas trajectórias se encontram no plano Oxy (despreza-se a resistência do ar).

Resolução — Achemos em primeiro lugar a equação da trajectória dum projéctil lançado sob um ângulo α no sentido positivo do eixo Ox. O movimento do projéctil é a sobreposição de dois movimentos: dum movimento uniforme de velocidade v_0 na direcção do lançamento e dum movimento de queda sob a acção da gravidade. A posição do projéctil M será, pois, definida em cada instante t pelas igualdades (fig. 253):

$$x = v_0 t \cos \alpha,$$

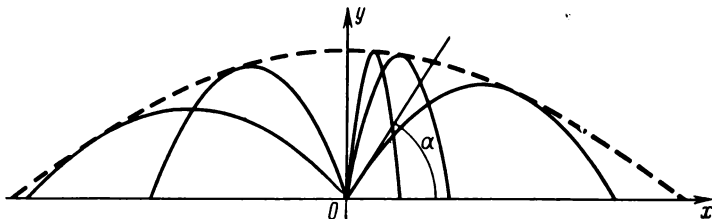
$$y_0 = v_0 t \operatorname{sen} \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

São as equações paramétricas da trajectória (o parâmetro é o tempo). Eliminando t, encontra-se a equação da trajectória sob a forma:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha};$$

Por fim, introduzindo a notação $\operatorname{tg}\alpha = k$, $\frac{g}{2v_0^2} = a$, obtém-se:

$$y = kx - ax^2(1 + k^2). \tag{8}$$

É a equação das parábolas que passam pela origem, de eixos verticais e de ramos virados para baixo. Obtém-se diferentes trajectórias fazendo variar k. A equação (8) é pois a equação duma família de parábolas com um parâmetro, que são as trajectórias dos projécteis lançados sob diferentes ângulos α e com a velocidade inicial dada (fig. 254).

F i g. 254.

Procuremos o envoltório desta família de parábolas.

Derivando os dois membros da equação (8) em relação a k, obtém-se:

$$x - 2akx^2 = 0. \tag{9}$$

Eliminemos k nas equações (8) e (9). Obtém-se:

$$y = \frac{1}{4a} - ax^2.$$

É a equação duma parábola de vértice no ponto $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e cujo eixo é Oy. Não é um lugar de pontos singulares (as parábolas (8) não tem pontos singulares). Assim, a parábola

$$y = \frac{1}{4a} - ax^2$$

é o envoltório da família de trajectórias. Chama-se *parábola de segurança,* porque a região que se encontra em redor desta parábola está fora do alcance dos projécteis lançados com a velocidade inicial v_0.

Exemplo — 5. Encontrar o envoltório da família de parábolas semi-cúbicas

$$y^3 - (x - C)^2 = 0.$$

Resolução — Derivemos a equação dada em relação ao parâmetro C:

$$2(x - C) = 0.$$

Obtém-se eliminando o parâmetro C das duas equações

$$y = 0.$$

O eixo Ox é o lugar geométrico dos pontos singulares (dos pontos de reversão de primeira espécie) (fig. 255). Com efeito, procuremos os pontos singulares da curva

$$y^3-(x-C)^2=0,$$

sendo C fixo. Encontra-se derivando em relação a x e y:

$$F'_x=-2(x-C)=0;$$

$$F'_y=3y^2=0.$$

Resolvendo as três últimas equações, encontram-se as coordenadas do ponto singular: $x=C$, $y=0$, por conseguinte, cada curva da família tem um ponto singular sobre o eixo Ox.

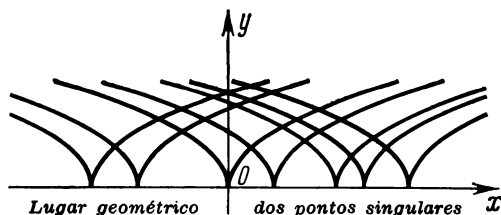



Fig. 255

Os pontos singulares descrevem o eixo Ox completamente quando o parâmetro C varia duma maneira contínua.

Exemplo — 6. Achar o envoltório e o lugar geométrico dos pontos singulares da família

$$(y-C)^2-\frac{2}{3}(x-C)^3=0. \tag{10}$$

Resolução — Derivando em ordem a C os dois membros da equação (10), tem-se:

$$-2(y-C)+\frac{2}{3}3(x-C)^2=0$$

ou

$$y-C-(x-C)^2=0. \tag{11}$$

Eliminemos agora o parâmetro C da igualdade obtida (11) e da equação (10) da família. Substituindo a expressão

$$y-C=(x-C)^2$$

na equação da família, obtém-se:

$$(x-C)^4-\frac{2}{3}(x-C)^3=0$$

ou

$$(x-C)^3\left[(x-C)-\frac{2}{3}\right]=0;$$

obtém-se assim dois valores de C, aos quais correspondem duas soluções do problema proposto.

Primeira resolução:

$$C = x;$$

deduz-se, pois, da igualdade (11):

$$y - x - (x - x)^2 = 0$$

ou

$$y = x.$$

Segunda resolução:

$$C = x - \frac{2}{3};$$

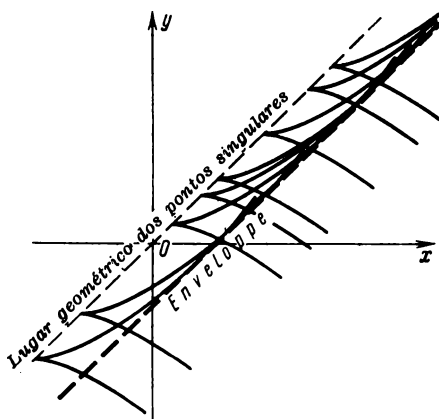
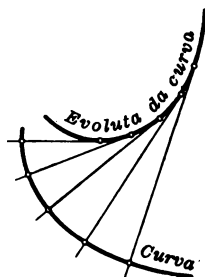
deduz-se, pois, da igualdade (11):

$$y - x + \frac{2}{3} - \left[x - x + \frac{2}{3}\right]^2 = 0$$

ou

$$y = x - \frac{2}{9}.$$

Obtivemos duas rectas $y = x$ e $y = x - \frac{2}{9}$. A primeira recta é o lugar dos pontos singulares e a segunda o envoltório (fig. 256).

Nota — 2. Demonstramos, no § 7, cap. VI, que as normais a uma curva eram ao mesmo tempo as tangentes à evoluta. Vê-se, pois,

F i g. 256.

F i g. 257.

que a evoluta duma curva é o envoltório da família das normais a esta curva (fig. 257).

Esta nota permite ainda indicar um método para a procura da evoluta: encontra-se a equação da evoluta duma curva definindo prèviamente a família das normais a essa curva, procurando depois o envoltório desta família.

§ 12. Soluções singulares das equações diferenciais de primeira ordem

Suponhamos que a equação diferencial

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0 \tag{1}$$

tem por integral geral

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0. \tag{2}$$

Suponhamos que a família de curvas integrais da equação (2) tem um envoltório. Mostremos que este envoltório é igualmente uma curva integral da equação diferencial (1).

Com efeito, o envoltório é tangente em cada um dos seus pontos a uma certa curva da família, isto é, que ela tem nesse ponto uma tangente comum com a curva. Por conseguinte, em cada ponto do envoltório, as quantidades x, y, y' são as mesmas para o envoltório e para a curva da família.

Ora para a curva da família as quantidades x, y, y' verificam a equação (1). Resulta daí que a abcissa, a ordenada e o coeficiente angular de cada ponto do envoltório verificam também esta mesma equação, o que significa que o envoltório é uma curva integral e que a sua equação é uma solução da equação diferencial dada.

Mas o envoltório não sendo em regra uma curva da família, a sua equação não pode ser deduzida do integral geral (2), particularizando C. É uma *solução singular* da equação diferencial.

Suponhamos conhecido o integral geral

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0;$$

eliminando C desta equação e o da equação $\Phi'_C(x,\ y,\ C)=0$, obtém-se uma equação $\psi(x,\ y)=0$. Se esta função verifica a equação diferencial (mas não pertence à família (2)), é um *integral singular.*

Notemos que passam pelo menos duas curvas integrais por cada ponto do integral singular, isto é, que a *unicidade da solução é violada em cada ponto dum integral singular.*

Exemplo — Achar a solução singular da equação

$$y^2(1+y'^2)=R^2. \tag{*}$$

Resolução — Calculemos o seu integral geral. Resolvamos a equação em relação a y';

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{y}.$$

Separando as variáveis, tem-se

$$\frac{y\,dy}{\pm\sqrt{R^2-y^2}}=dx.$$

Deduz-se o integral geral por integração:

$$(x-C)^2+y^2=R^2.$$

Vê-se que a família de curvas integrais é a família de círculos de raio R com centros no eixo das abcissas. O envoltório desta família de círculos é dada pelas duas rectas $y=\pm R$.

As funções $y=\pm R$ verificam a equação diferencial (*). Elas representam os integrais singulares.

§ 13. Equação de Clairaut

Consideremos a seguinte equação

$$y=x\frac{dy}{dx}+\psi\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{1}$$

chamada *equação de Clairaut*. Integra-se introduzindo um parâmetro auxiliar. Façamos, com efeito, $\frac{dy}{dx}=p$; a equação (1) toma a forma

$$y=xp+\psi(p). \tag{1'}$$

Derivemos todos os termos desta última equação em relação a x, tendo em vista que $p=\frac{dy}{dx}$ é uma função de x:

$$p=x\frac{dp}{dx}+p+\psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

ou

$$[x+\psi'(p)]\frac{dp}{dx}=0.$$

Anulemos, separadamente, cada factor. Obtém-se:

$$\frac{dp}{dx}=0 \tag{2}$$

e

$$x+\psi'(p)=0. \tag{3}$$

1. A integração de (2) dá $p=C$ ($C=$ const.). Substituindo este valor de p na equação (1), encontra-se o seu integral geral

$$y=xC+\psi(C) \tag{4}$$

que representa, do ponto de vista geométrico, uma *família de rectas.*

2. Tiremos p da equação (3) de modo que seja função de x e substituamos na equação (1'); tem-se

$$y = xp(x) + \psi[p(x)] \qquad (1'')$$

que, como vamos ver, é uma solução da equação (1).

Com efeito, encontra-se em virtude de (3):

$$\frac{dy}{dx} = p + [x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = p.$$

Por conseguinte, obtém-se uma identidade quando se substitui a função (1'') na equação (1):

$$xp + \psi(p) = xp + \psi(p).$$

A solução (1'') não pode ser obtida a partir do integral geral (4) na equação (1), particularizando C. É uma *solução singular;* obtém-se eliminando p das equações

$$\left.\begin{array}{l} y = xp + \psi(p), \\ x + \psi'(p) = 0 \end{array}\right\}$$

ou, o que equivale o mesmo, eliminando C nas equações

$$y = xC + \psi(C);$$

$$x + \psi'_C(C) = 0.$$

Vê-se, pois, que a *solução singular da equação de Clairaut é o envoltório da família de rectas definidas pelo integral geral* (4).

Exemplo — Achar os integrais geral e singular da equação

$$y = x\frac{dy}{dx} + \frac{a\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Resolução — Obtém-se o integral geral substituindo $\frac{dy}{dx}$ por C:

$$y = xC + \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}.$$

Para obter a *solução singular,* derivemos esta última equação em relação a C:

$$x + \frac{a}{(1 + C^2)^{3/2}} = 0.$$

Obtém-se a solução singular (o envoltório) sob forma paramétrica (sendo C um parâmetro):

$$\begin{cases} x = -\dfrac{a}{(1+C^2)^{3/2}}, \\ y = \dfrac{aC^3}{(1+C^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro C, acha-se a dependência entre x e y. Elevando cada uma destas equações separadamente à potência $2/3$ e juntando membro a membro, obtém-se a solução singular sob a forma

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

É um astroide. Todavia, o envoltório da família de rectas (e portanto a solução singular) não está representada pelo asteroide completamente, mas pela metade esquerda (porque as equações paramétricas do envoltório mostram que $x < 0$ (fig. 258).

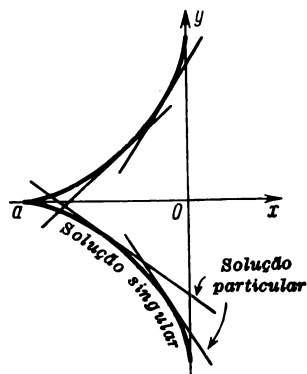



Fig. 258.

§ 14. Equação de Lagrange

Assim se chama uma equação da forma

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{1}$$

em que φ e ψ são funções dadas de $\frac{dy}{x}$.

Esta equação é linear em relação a x e y. A equação de Clairaut, examinada no parágrafo anterior, é um caso particular da equação de Lagrange quando $\varphi(y') \equiv y'$. Tal como a equação de Clairaut, a equação de Lagrange integra-se introduzindo um parâmetro auxiliar p. Façamos

$$y' = p;$$

a equação proposta toma, então, a forma

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{1'}$$

Derivando em relação a x, obtém-se

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

ou

$$p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}. \tag{1''}$$

Encontra-se, logo à primeira vista, certas soluções desta equação porque se torna numa identidade para qualquer valor constante $p = p_0$ que verifique a condição

$$p_0 - \varphi(p_0) = 0.$$

Com efeito quando p é constante, tem-se $\frac{dp}{dx} = 0$ e os dois membros da equação (1″) anulam-se.

A solução correspondente a cada valor de $p = p_0$, isto é, $\frac{dy}{dx} = p_0$, é uma *função linear de x* (dado que a derivada $\frac{dy}{dx}$ é sòmente constante para as funções lineares). Para encontrar esta função, basta substituir na igualdade (1′) o valor $p = p_0$:

$$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0).$$

Se esta solução não puder ser deduzida da solução gèral particularizando a constante arbitrária, é uma *solução singular.*

Encontremos neste momento a *solução geral.* Para tal efeito, escrevamos a equação (1″) sob a forma

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

e consideremos x como função de p. A equação obtida é, então, uma equação diferencial linear em relação à função $x(p)$.

Encontra-se, resolvendo-a,

$$x = \omega(p, C). \tag{2}$$

Eliminando o parâmetro p das equações (1′) e (2), obtém-se o *integral geral* da equação (1) sob a forma

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Exemplo — Seja a equação

$$y = xy'^2 + y'^2. \tag{I}$$

Façamos $y' = p$, obtém-se:

$$y = xp^2 + p^2. \tag{I′}$$

Derivemos em ordem a x. Tem-se:

$$p = p^2 + [2xp + 2p]\frac{dp}{dx}. \tag{I″}$$

Achemos as *soluções singulares.* Dado que $p = p^2$ quando $p_0 = 0$ e $p_1 = 1$, ter-se-á como solução as funções (ver (I′)):

$$y = x \cdot 0^2 + 0^2, \text{ isto é, } y = 0$$

$$y = x + 1.$$

Saber-se-á se estas funções são soluções particulares ou singulares após ter encontrado o integral geral. Para achar o integral geral escrevamos a a equação (1″) sob a forma

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{2p}{p-p^2} = \frac{2}{1-p}$$

e consideremos x como função da variável independente p. Integrando a equação linear (relativamente a x) obtida, tem-se

$$x = -1 + \frac{C^2}{(p-1)^2} . \tag{II}$$

Eliminando p nas equações (I′) e (II), obtém-se o integral geral:

$$y = (C + \sqrt{x+1})^2.$$

A equação proposta tem por *integral singular*

$$y = 0,$$

dado que esta solução não resulta da solução geral particularizando C.

Quanto à função $y = x + 1$, não é uma solução singular, mas uma solução particular; deduz da solução geral fazendo $C = 0$.

§ 15. Trajectórias ortogonais e isogonais

Consideremos uma família de curvas com um parâmetro

$$\Phi(x\ \ y,\ C) = 0.$$

Chamam-se *trajectórias isogonais* às curvas que cortam todas as curvas da família dada (1) sob um ângulo constante. Se se tiver um ângulo recto, estas curvas são, então, *trajectórias ortogonais*.

Trajectórias ortogonais — Procuremos a equação das trajectórias ortogonais. Escrevamos a equação diferencial da família de curvas dada, eliminando o parâmetro C das equações

$$\Phi(x,\ y,\ C) = 0$$

e

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

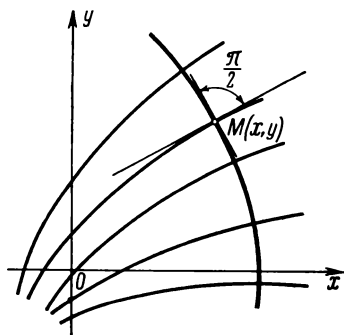
Seja

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1′}$$

essa equação diferencial.

$\frac{dy}{dx}$ é aqui o declive da tangente no ponto $M(x, y)$ na curva correspondente da família. Dado que a trajectória ortogonal que passa pelo ponto $M(x, y)$ é perpendicular à curva correspondente, o seu declive $\frac{dy_T}{dx}$ está ligado a $\frac{dy}{dx}$ pela relação (fig. 259)

Fig. 259

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy_T}{dx}}. \tag{2}$$

Substituindo esta expressão na equação (1′) e omitindo o índice T, obtém-se uma relação entre as coordenadas dum ponto arbitrário (x, y) e o declive da trajectória ortogonal deste ponto, isto é, *a equação diferencial das trajectórias ortogonais*

$$F\left(x, y, -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = 0. \tag{3}$$

O integral geral desta equação

$$\Phi_1(x, y, C) = 0$$

representa a *família das trajectórias ortogonais.*

As trajectórias ortogonais encontram-se, por exemplo, quando se estuda o derramamento plano dum fluído.

Consideremos o movimento plano dum fluído tal que o vector velocidade $v(x, y)$ da corrente seja definido em cada ponto do plano Oxy. Se este vector apenas depende da posição do ponto e não do tempo, diz-se que o movimento é estacionário. Vamos considerar um tal movimento. Além disso, suporemos que existe um potencial de velocidades, isto é, uma função $u(x, y)$ tal que as projecções do vector $v(x, y)$ sobre os eixos de coordenadas $v_x(x, y)$ e $v_y(x, y)$ sejam derivadas parciais desta função em relação a x e y:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v_x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = v_y. \tag{4}$$

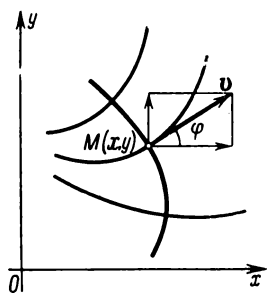
As curvas da família

$$u(x, y) = C \tag{5}$$

chamam-se *linhas de nível* ou *linhas equipotenciais.*

As curvas cuja tangente em cada ponto se confunde com o vector $v(x, y)$ chamam-se *linhas de corrente*; elas materializam as trajectórias das partículas em movimento.

Mostremos que as *linhas de corrente* são as trajectórias ortogonais da família de linhas equipotenciais (fig. 260).

Seja φ o ângulo formado pelo vector velocidade v e o eixo Ox. Tem-se, em virtude das relações (4),

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = |v| \cos \varphi; \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = |v| \operatorname{sen} \varphi;$$

donde se deduz o declive da tangente à linha de corrente

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}}{\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x}} \tag{6}$$

Fig. 260.

Obtém-se o declive da tangente à linha equipotencial derivando a relação (5) em relação a x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

donde

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}}. \tag{7}$$

Por conseguinte, o declive da tangente à linha equipotencial é o inverso mudado de sinal do declive da tangente à linha de corrente.

Daí resulta que as linhas equipotenciais e as linhas de corrente são ortogonais.

No caso dum campo eléctrico ou dum campo magnético, as trajectórias ortogonais da família das curvas equipotenciais são as linhas de força do campo.

Exemplo — 1. Achar as trajectórias ortogonais da família de parábolas

$$y = Cx^2.$$

Resolução — Escrevamos a equação diferencial da família,

$$y' = 2Cx.$$

Obtém-se eliminando C:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}.$$

Substituindo nesta igualdade y' por $-\frac{1}{y'}$, obtém-se a equação diferencial

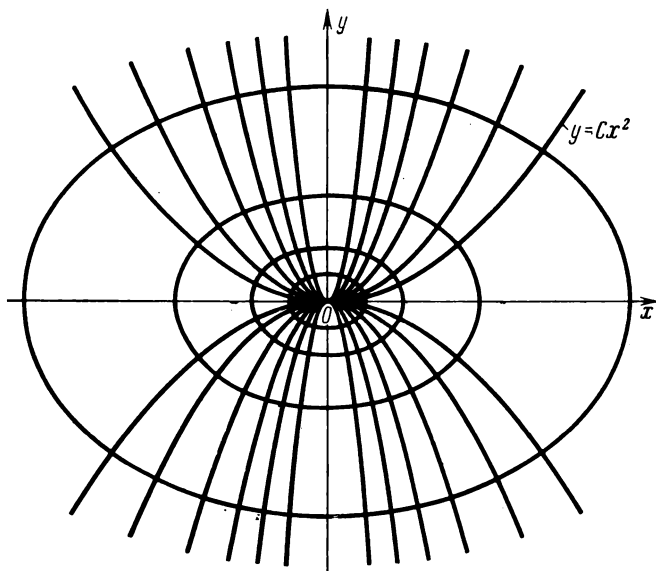



Fig. 261

da família das trajectórias ortogonais

$$-\frac{1}{yy'} = \frac{2}{x}$$

ou

$$y\,dy = -\frac{x\,dx}{2}.$$

O seu integral geral é

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = C^2.$$

Por conseguinte, as trajectórias ortogonais da família de parábolas dada formam uma família de elipses de semi-eixos $a = 2C$, $b = C\sqrt{2}$ (fig. 261).

Trajectórias isogonais — Suponhamos que as trajectórias cortam as curvas duma dada família sob o ângulo α. Façamos $\operatorname{tg}\alpha = k$.

O declive $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$ (fig. 262) da tangente à curva da família e o declive $\frac{dy_T}{dx} = \operatorname{tg}\psi$ da tangente à trajectória isogonal estão ligadas pela relação

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\psi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\psi},$$

isto é,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_T}{dx} - k}{k\frac{dy_T}{dx} + 1}. \qquad (2')$$

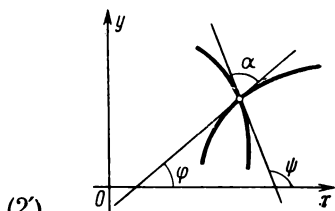



Fig. 262.

Substituindo esta expressão na equação (1′) e omitindo o índice T, obtém-se a equação diferencial das trajectórias isogonais.

Exemplo — 2. Achar as trajectórias isogonais da família de rectas

$$y = Cx. \qquad (8)$$

Supõe-se que estas rectas são cortadas sob o ângulo α e fár-se-á $\operatorname{tg}\alpha = k$.

Resolução — Escrevamos a equação diferencial da família de rectas. Derivemos a equação (8) em relação a x:

$$\frac{dy}{dx} = C.$$

Por outra via, deduz-se da mesma equação

$$C = \frac{y}{x}.$$

A equação da família de rectas é, pois,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Obtém-se a equação diferencial das trajectórias isogonais servindo-nos da relação (2′)

$$\frac{\frac{dy_T}{dx} - k}{k\frac{dy_T}{dx} + 1} = \frac{y}{x}.$$

Tem-se, pois, omitindo o índice T:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k + \frac{y}{x}}{1 - k\frac{y}{x}}.$$

Obtém-se o integral geral integrando esta equação homogénea:

$$\operatorname{Log} \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + \operatorname{Log} C, \tag{9}$$

que é a família das trajectórias. Para ver quais são as curvas desta família,

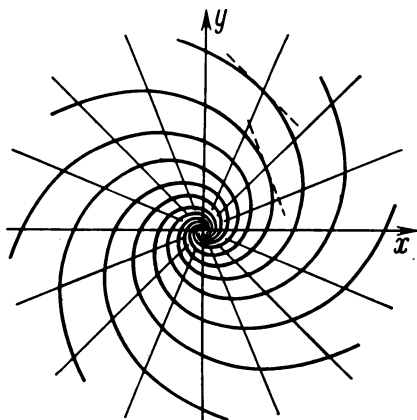



Fig. 263

passemos a coordenadas polares:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi ; \qquad \sqrt{x^2+y^2} = \rho.$$

Obtém-se, substituindo estas expressões em (9)

$$\operatorname{Log} \rho = \frac{1}{k} \varphi + \operatorname{Log} C$$

ou

$$\rho = Ce^{\frac{\varphi}{k}}.$$

Vê-se que a família das trajectórias isogonais é composta de espirais logaritmícas (fig. 263).

§ 16. Equações diferenciais de ordem superior a um (*noções gerais*)

Como indicámos mais acima (ver § 2), pode-se escrever simbòlicamente uma equação diferencial de ordem n sob a forma

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

ou ainda, se se resolver em relação à derivada de ordem n,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (1')$$

No presente capítulo, apenas consideraremos equações resolúveis em relação à derivada de ordem mais elevada. Tem-se para estas equações um teorema de *existência* e de *unicidade da solução* análogo ao das equações de primeira ordem.

Teorema — *Se na equação*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

a função $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *e as suas derivadas parciais em relação a* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ *forem contínuas num certo domínio que contém os valores* $x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, *existe uma solução e só uma* $y = y(x)$ *da equação que verifica as condições*

$$\begin{aligned} y_{x=x_0} &= y_0, \\ y'_{x=x_0} &= y'_0, \\ &\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}_{x=x_0} &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \qquad (2)$$

que se chamam as *condições iniciais*. A demonstração deste teorema esta fora do alcance deste livro.

Se se considerar uma equação de segunda ordem $y'' = f(x, y, y')$, as condições iniciais da solução para $x = x_0$, serão

$$y = y_0, \quad y' = y'_0,$$

em que x_0, y_0, y_0' são números dados. O sentido geométrico destas condições é o seguinte: passa pelo ponto dado do plano (x_0, y_0) uma única curva cujo declive da tangente neste ponto é y_0'. Daí resulta que se se der diferentes valores a y'_0 sendo fixo o ponto x_0, y_0, obtém-se tantas curvas integrais de declives diferentes quantas passem pelo ponto dado.

Introduzamos agora a noção de solução geral de uma equação de ordem n.

Definição — Chama-se solução geral de uma equação de ordem n a uma função

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

dependente de n constantes arbitrárias $C_1, C_2, \ldots, C_n$, tal que:

a) verifica a equação quaisquer que sejam os valores das constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$;

b) sendo dadas as condições iniciais:

$$y_{x=x_0} = y_0,$$
$$y'_{x=x_0} = y'_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n-1)}_{x=x_0} = y_0^{(n-1)},$$

se possa escolher as constantes C_1, C_2, ..., C_n de modo que a função $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ verifique as condições (supõe-se que os valores iniciais x_0, y_0, y'_0, ..., $y^{(n-1)}$ pertencem ao domínio de existência da solução).

Uma relação da forma $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, que define a solução geral implìcitamente, chama-se *integral geral* da equação diferencial proposta.

Qualquer função que se deduza da solução geral, que concretiza os valores C_1, C_2, ..., C_n, é uma solução particular. A curva representativa duma solução particular é uma *curva integral* da equação diferencial dada.

Resolver (integrar) uma equação diferencial de ordem *n*, é:

1) achar a solução geral (se as condições iniciais não forem dadas)

2) encontrar a solução particular da equação que satisfaz às condições iniciais (se as houver).

Damos, nos parágrafos seguintes, métodos de resolução de diferentes equações de ordem *n*.

§ 17. Equação da forma $y^{(n)} = f(x)$

A equação mais simples de ordem *n* é da forma

$$y^{(n)} = f(x). \tag{1}$$

Achemos o seu integral geral.

Integremos em relação a *x* os dois membros da equação. Obtém-se, tendo em consideração que $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$:

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1,$$

em que x_0 é um valor arbitrário fixo de x e C_1 uma constante de integração.

Integremos uma vez mais:

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\right)dx + C_1(x - x_0) + C_2.$$

Continuando assim, obtém-se (após n integrações) a expressão do integral

$$y = \int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \ldots dx + \frac{C_1 (x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + $$
$$+ C_2 \frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n.$$

Para encontrar a solução particular que verifica as condições iniciais

$$y_{x=x_0} = y_0;\ y'_{x=x_0} = y'_0;\ \ldots;\ y^{(n-1)}_{x=x_0} = y_0^{(n-1)},$$

basta fazer

$$C_n = y_0,\ C_{n-1} = y'_0,\ \ldots,\ C_1 = y_0^{(n-1)}.$$

Exemplo — 1. Encontrar o integral geral da equação

$$y'' = \text{sen}\,(kx)$$

e a solução particular que satisfaça às condições iniciais

$$y_{x=0} = 0,\quad y'_{x=0} = 1.$$

Resolução.

$$y' = \int_0^x \text{sen}\,kx\,dx + C_1 = -\frac{\cos kx - 1}{k} + C_1,$$

$$y = -\int_0^x \left(\frac{\cos kx - 1}{k}\right) dx + \int_0^x C_1\,dx + C_2$$

ou

$$y = -\frac{\text{sen}\,kx}{k^2} + \frac{x}{k} + C_1 x + C_2.$$

Tal é o integral geral. Para encontrar a solução particular que satisfaça às condições iniciais dadas, basta determinar os valores correspondentes de C_1 e C_2.

Deduz-se da condição $y_{x=0} = 0$ $C_2 = 0$.

Deduz-se da condição $y'_{x=0} = 1$ $C_1 = 1$.

Por conseguinte, a solução particular procurada é

$$y = -\frac{\text{sen}\,kx}{k^2} + x\left(\frac{1}{k} + 1\right).$$

Encontram-se equações diferenciais deste género na teoria da flexão de vigas.

Exemplo — Consideremos uma viga prismática elástica que flexiona sob a acção de forças exteriores, tão bem repartidas como concentradas. Levemos o eixo Ox horizontalmente, por forma a confundir-se com o eixo da viga antes da sua deformação e Oy verticalmente para baixo (fig. 264).

Qualquer força que aja sobre a viga (por exemplo, a carga, a reacção dos apoios) tem um momento em relação a uma secção transversal da viga que é igual ao produto da força pela distância entre o ponto de aplicação da força e a secção considerada. A soma $M(x)$ dos momentos de todas as forças aplicadas dum mesmo lado da secção da abcissa x chama-se momento flexionador da viga em relação à secção dada. Demonstra-se nos cursos de resistência de materiais que o momento flexionador duma viga é

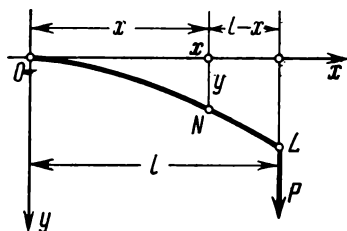
$$\frac{EJ}{R},$$

onde E é o módulo de elasticidade, que depende do material, J o momento de inércia da secção transversal da viga em relação ao eixo horizontal que passa pelo centro de gravidade desta secção, R o raio de curvatura do eixo curvo da viga, cuja expressão é dada pela fórmula (§ 6, Cap. VI)

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Fig. 264

Por conseguinte, a equação diferencial do eixo curvo da viga escreve-se

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ}. \qquad (2)$$

Se se admitir que as deformações são pequenas e que os ângulos entre as tangentes ao eixo da viga e o eixo Ox são pequenos, poder-se-á desprezar a quantidade y'^2 que é o quadrado da pequena quantidade y' e fazer

$$R = \frac{1}{y''}.$$

A equação diferencial da viga flectida torna-se, então,

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ}. \qquad (2')$$

É uma equação da forma (1).

Exemplo — 3. Uma viga está embutida pela sua extremidade O e uma força P age verticalmente na extremidade L à distância l a partir da secção de encaixe (fig. 264). Desprezar-se-á o peso da viga.

Consideremos a secção no ponto $N(x)$. O momento de flexão em relação à secção N é no caso dado

$$M(x) = (l-x)P.$$

A equação diferencial (2′) transforma-se em

$$y'' = \frac{P}{EJ}(l-x).$$

Condições iniciais: a deflexão y é nula quando $x=0$ e a tangente ao eixo da viga curvada confunde-se com o eixo Ox, isto é,

$$y_{x=0} = 0, \quad y'_{x=0} = 0.$$

Integrando, vem

$$y' = \frac{P}{EJ} \int_0^x (l-x)\, dx = \frac{P}{EJ}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right);$$

$$y = \frac{P}{2EJ}\left(lx^2 - \frac{x^3}{3}\right). \tag{3}$$

Em especial, a fórmula (3) define a flecha h na extremidade L:

$$h = y_{x=l} = \frac{Pl^3}{2EJ}.$$

§ 18. Alguns tipos de equações diferenciais de segunda ordem que se reduzem a equações de primeira ordem

I — *Equações da forma*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \tag{1}$$

que não contém, explìcitamente, a função desconhecida y.

Resolução — Designemos a derivada $\frac{dy}{dx}$ por p: $\frac{dy}{dx} = p$. Ter-se-á $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$.

Substituindo estas expressões das derivadas na equação (1), obtém-se uma equação de primeira ordem

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p),$$

em que p é a função desconhecida de x. Por integração, obtém-se o integral geral

$$p = p(x, C_1),$$

depois, deduz-se da relação $\frac{dy}{dx} = p$ o integral geral da equação (1):

$$y = \int p(x, C_1)\, dx + C_2.$$

Exemplo — 1. Consideremos a equação diferencial da catenária (ver § 1)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Façamos

$$\frac{dy}{dx} = p;$$

tem-se

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$$

e obtém-se uma equação diferencial de primeira ordem em relação à função auxiliar $p(x)$:

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{a}\sqrt{1+p^2}.$$

Separemos as variáveis

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{dx}{a},$$

então,

$$\operatorname{Log}(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{x}{a}+C_1,$$

$$p=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}+C_1}-e^{-\left(\frac{x}{a}+C_1\right)}\right).$$

Mas como $p=\frac{dy}{dx}$, esta última relação é uma equação diferencial que contém a função desconhecida y. Obtém-se integrando a equação da catenária (ver § 1)

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}+C_1}+e^{-\left(\frac{x}{a}+C_1\right)}\right)+C_2.$$

Achemos a solução particular que satisfaz às condições iniciais seguintes:

$$y_{x=0}=a,$$

$$y'_{x=0}=0.$$

A primeira condição conduz $C_2=0$, a segunda, $C_1=0$.
Obtém-se, finalmente:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Nota — Integra-se duma maneira análoga a equação

$$y^{(n)}=f(x,\ y^{(n-1)}).$$

Fazendo $y^{(n-1)}=p$, obtém-se para determinar p uma equação de primeira ordem

$$\frac{dp}{dx}=f(x,\ p).$$

Determinando p em função de x, deduz-se y da relação $y^{(n-1)}=p$ (ver § 17).

II — *Equações da forma*

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(y,\ \frac{dy}{dx}\right) \tag{2}$$

que não contêm, explìcitamente, a variável independente x. Façamos de novo

$$\frac{dy}{dx}=p, \tag{3}$$

mas consideremos agora que *p é função de y* (e não de *x*, como anteriormente). Ter-se-á

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p.$$

Substituindo na equação (2) as expressões $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$, obtém-se uma equação de primeira ordem apoiando-se sobre a função auxiliar p:

$$p\frac{dp}{dy}=f(y,\ p). \tag{4}$$

Integrando, obtém-se, p como função de y e duma constante arbitrária C_1:

$$p=p(y,\ C_1).$$

Substituindo esta expressão na relação (3), encontra-se uma equação diferencial de primeira ordem relativamente à função y de x:

$$\frac{dy}{dx}=p(y,\ C_1).$$

Separando as variáveis, tem-se:

$$\frac{dy}{p(y,\ C_1)}=dx.$$

A integração desta equação fornece o integral geral da equação proposta:

$$\Phi(x,\ y,\ C_1,\ C_2)=0.$$

Exemplo — 2. Encontrar o integral geral da equação

$$3y''=y^{-\frac{5}{3}}.$$

Resolução — Façamos $p=\frac{dy}{dx}$ e consideremos p como função de y. Tem-se, então, $y''=p\frac{dp}{dy}$ e obtém-se uma equação de primeira ordem em

que a função desconhecida é p:

$$3p \frac{dp}{dy} = y^{-\frac{5}{3}}.$$

Integrando esta equação, tem-se

$$p^2 = C_1 - y^{-\frac{2}{3}} \quad \text{ou} \quad p = \pm \sqrt{C_1 - y^{-2/3}}.$$

Mas $p = \frac{dy}{dx}$; obtém-se, pois, para y a equação

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^{-2/3}}} = dx \quad \text{ou} \quad \frac{y^{1/3} dy}{\pm \sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}} = dx,$$

e obtém-se

$$x + C_2 = \pm \int \frac{y^{1/3} dy}{\sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}}.$$

Para calcular este integral, façamos a substituição

$$C_1 y^{2/3} - 1 = t^2.$$

Então, tem-se,

$$y^{1/3} = (t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{C_1^{1/2}};$$

$$dy = 3t\,(t^2 + 1)^{1/2} \frac{1}{C_1^{3/2}}\,dt.$$

Por conseguinte,

$$\int \frac{y^{1/3} dy}{\sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}} = \frac{1}{C_1^2} \int \frac{3t\,(t^2+1)}{t}\,dt = \frac{3}{C_1^2} \left(\frac{t^3}{3} + t \right) =$$

$$= \frac{1}{C_1^2} \sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}\,(C_1 y^{2/3} + 2).$$

Finalmente, obtem-se

$$x + C_2 = \pm \frac{1}{C_1^2} \sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}\,(C_1 y^{2/3} + 2).$$

Exemplo — 3. Suponhamos que um ponto material descreve a recta Ox sob a acção de uma força que depende sòmente da posição do ponto. A equação diferencial do movimento é

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x).$$

Seja $x = x_0$ e $\frac{dx}{dt} = v_0$ para $t = 0$.

Multipliquemos os dois membros da equação por $\frac{dx}{dt}\,dt$ e integremos de 0 a t. Obtém-se:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx,$$

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left[-\int_{x_0}^{x} F(x)\, dx\right] = \frac{1}{2} m v_0^2 = \text{const.}$$

O primeiro termo da última igualdade representa a energia cinética do ponto material e o segundo, a sua energia potencial. Resulta da igualdade obtida que a soma das energias potencial e cinética é constante durante o movimento.

Problema do pêndalo matemático. — Consideremos um ponto material de massa m que se move sob a acção do seu próprio peso sobre uma circunferência L num plano vertical. Achemos a equação do movimento abstraindo das forças de resistência (fricção, resistência do ar, etc.).

Tomemos a origem das coordenadas no ponto mais baixo da circunferência e dirijamos o eixo Ox tangencialmente a esta última (fig. 265).

Seja l o raio da circunferência, s o comprimento da porção de arco de origem O no ponto variável M onde se encontra a massa m, sendo este arco tomado com o sinal ($s > 0$ se o ponto M está à direita de O; $s < 0$ se o ponto M está à esquerda de O).

Fig. 265.

Propõe-se encontrar a dependência entre s e o tempo t.

Decomponhamos a força de gravidade mg nas suas componentes tangencial e normal. A primeira que é igual a $-mg \operatorname{sen} \varphi$, implica o movimento, a segunda é compensada pela reacção da circunferência descrita pela massa m.

A equação do movimento escreve-se, pois,

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \operatorname{sen} \varphi.$$

Como se tem para a circunferência $\varphi = \frac{s}{l}$, obtém-se a equação

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \operatorname{sen} \frac{s}{l}.$$

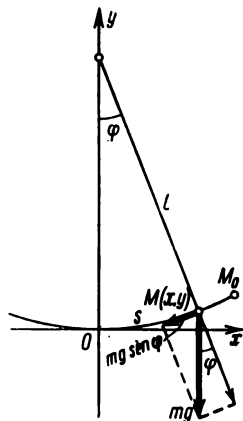
É uma equação diferencial do tipo II (porque não contém esplicitamente a variável independente t).

Integremo-la como foi acima indicado:

$$\frac{ds}{dt} = p, \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dp}{ds} p.$$

Por conseguinte,

$$p \frac{dp}{ds} = -g \operatorname{sen} \frac{s}{l}$$

$$p\, dp = -g \operatorname{sen} \frac{s}{l}\, ds,$$

logo

$$p^2=2gl\cos\frac{s}{l}+C_1.$$

Designemos por s_0 a distância máxima do ponto M. A velocidade do ponto é nula quando $s=s_0$:

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{s=s_0}=\left.p\right|_{s=s_0}=0.$$

Isto permite determinar C_1:

$$0=2gl\cos\frac{s_0}{l}+C_1,$$

donde

$$C_1=-2gl\cos\frac{s_0}{l}.$$

Por conseguinte,

$$p^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=2gl\left(\cos\frac{s}{l}-\cos\frac{s_0}{l}\right)$$

ou, aplicando a esta última a fórmula relativa à diferença de cossenos:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=4gl\,\mathrm{sen}\frac{s+s_0}{2l}\,\mathrm{sen}\frac{s_0-s}{2l}, \tag{5}$$

ou (*)

$$\frac{ds}{dt}=2\sqrt{gl}\sqrt{\mathrm{sen}\frac{s+s_0}{2l}\,\mathrm{sen}\frac{s_0-s}{2l}}. \tag{6}$$

É uma equação de variáveis separáveis. Separemos as variáveis:

$$\frac{ds}{\sqrt{\mathrm{sen}\frac{s+s_0}{2l}\,\mathrm{sen}\frac{s_0-s}{2l}}}=2\sqrt{gl}\,dt. \tag{7}$$

Suporemos por momentos que $s\neq s_0$ de modo que o denominador da fracção não seja nulo. Se se supuser que $s=0$ quando $t=0$ ter-se-á a igualdade (7)

$$\int_0^s\frac{ds}{\sqrt{\mathrm{sen}\frac{s+s_0}{2l}\,\mathrm{sen}\frac{s_0-s}{2l}}}=2\sqrt{gl}\,t. \tag{8}$$

Esta igualdade dá a dependência entre s e t. O integral à esquerda não se exprime por meio de função elementar. O mesmo se diga de s como função de t. Consideremos o problema posto aproximadamente. Suporemos que os ângulos $\frac{s_0}{l}$ e $\frac{s}{l}$ são pequenos. Os ângulos $\frac{s+s_0}{2l}$ e $\frac{s_0-s}{2l}$ não serão

---

(*) Tomamos o sinal mais antes do radical. Decorrerá da nota feita no fim deste problema que não há lugar a examinar o caso do sinal menos.

superiores a $\frac{s_0}{l}$. Substituámos na equação (6) os senos pelos ângulos

$$\frac{ds}{dt} = 2\sqrt{gl}\sqrt{\frac{s+s_0}{2l}\cdot\frac{s_0-s}{2l}}$$

ou

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{s_0^2-s^2}. \tag{6'}$$

Separemos as variáveis. Obtem-se (supondo provisòriamente que $s \neq s_0$)

$$\frac{ds}{\sqrt{s_0^2-s^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,dt. \tag{7'}$$

Suporemos de novo que $s = 0$ quando $t = 0$. Integrando esta última equação, tem-se:

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{s_0^2-s^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t \tag{8'}$$

ou

$$\operatorname{arc\,sen}\frac{s}{s_0} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

donde

$$s = s_0 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t. \tag{9}$$

Nota — Suposemos até agora que $s \neq s_0$. Mas pode-se verificar, substituindo directamente, que a função (9) é solução da equação (6′) qualquer que seja t.

Notemos que a solução (9) é uma solução aproximada da equação (5), dado que substituímos a equação (6) pela equação aproximada (6′).

A igualdade (9) mostra que o ponto M (que se pode considerar como a extremidade do pêndulo) executa oscilações harmónicas de período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Este período não depende da amplitude da oscilação s_0.

Exemplo — 4. Problema da segunda velocidade cósmica.

Determinar a velocidade a que é preciso lançar um corpo verticalmente para cima para que escape à atracção terrestre. Desprezar-se-á a resistência do ar.

Resolução — Designemos as massas da terra e do corpo respectivamente por M e m. Em virtude da lei da atracção de Newton a força que solicita o corpo m é

$$f = k\frac{M\cdot m}{r^2},$$

em que r é a distância entre o centro da terra e o centro de gravidade do corpo lançado, e k a constante da gravitação universal.

A equação diferencial do movimento do corpo de massa m é

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -k\frac{M\cdot m}{r^2}$$

ou

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -k\frac{M}{r^2}. \tag{10}$$

Tomamos o sinal menos porque a aceleração é aqui negativa. A equação (10) é uma equação da forma (2). Resolvê-la-emos tomando por condições iniciais:

$$\text{para } t=0 \quad r=R, \quad \frac{dr}{dt}=v_0.$$

R é aqui o raio da Terra e v_0, a velocidade de lançamento. Introduzamos as notações

$$\frac{dr}{dt}=v, \quad \frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=v\frac{dv}{dr},$$

sendo v a velocidade do movimento. Obtém-se, substituindo na equação (10):

$$v\frac{dv}{dr}=-k\frac{M}{r^2}. \qquad v\,dv=-kM\frac{dr}{r^2}.$$

Integrando-se esta equação, vem

$$\frac{v^2}{2}=+kM\frac{1}{r}+C_1. \tag{11}$$

Determinemos C_1 no caso de $v = v_0$ na superfície da Terra ($r = R$)

$$\frac{v_0^2}{2}=+kM\frac{1}{R}+C_1$$

ou

$$C_1=-\frac{kM}{R}+\frac{v_0^2}{2}.$$

Substituámos o valor encontrado C_1 na igualdade (11):

$$\frac{v^2}{2}=+kM\frac{1}{r}-\frac{kM}{R}+\frac{v_0^2}{2}$$

ou

$$\frac{v^2}{2}=kM\frac{1}{r}+\left(\frac{v_0^2}{2}-\frac{kM}{R}\right). \tag{12}$$

Ora, a velocidade do corpo deve ser constantemente positiva (ela não se anula), pois $\frac{v^2}{2}>0$. Como a quantidade $\frac{kM}{r}$ se torna arbitràriamente pequena quando r cresce indefinidamente, a condição $\frac{v^2}{2}>0$ terá lugar para todo o r sòmente se

$$\frac{v_0^2}{2}-\frac{kM}{R}\geqslant 0 \tag{13}$$

ou

$$v_0\geqslant\sqrt{\frac{2kM}{R}}.$$

Tem-se, pois, para a velocidade mínima

$$v_0=\sqrt{\frac{2kM}{R}}, \tag{14}$$

em que

$$k = 6{,}66 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{g} \cdot \text{s}^2},$$

$$R = 63 \cdot 10^7 \text{ cm}.$$

Na superfície da Terra, $r = R$, a aceleração da força de gravidade é $g \left(g = 981 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \right)$.

Sendo assim, deduz-se da igualdade (10)

$$g = k \frac{M}{R^2}$$

ou

$$M = \frac{gR^2}{k}.$$

Substituindo este valor de M na fórmula (14), obtém-se:

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 63 \cdot 10^7} \approx 11{,}2 \cdot 10^5 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 11{,}2 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

§ 19. Integração gráfica das equações diferenciais de segunda ordem

Vejamos qual é a interpretação geométrica duma equação diferencial de segunda ordem. Seja a equação

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{1}$$

Designemos por φ o ângulo formado pela tangente à curva com o eixo positivo Ox; tem-se

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi. \tag{2}$$

Para explicitar o sentido geométrico da derivada segunda, lembremo-nos que a fórmula do raio de curvatura duma curva num dado ponto (*) é

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Donde

$$y'' = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{R}.$$

(*) Suposemos até agora que o raio de curvatura era um número essencialmente *positivo*, mas suporemos neste parágrafo que o aio de curvatura poderá tomar os valores tanto positivos como negativos; se a curva é convexa ($y'' < 0$), suporemos o raio de curvatura negativo ($R < 0$); supô-lo-emos positivo ($R > 0$) se a curva é côncava ($y'' > 0$).

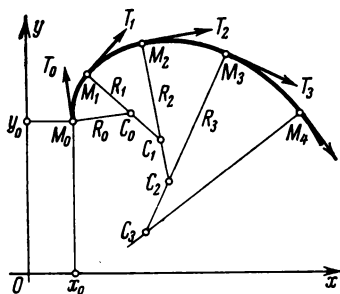
Ora

$$y' = \operatorname{tg} \varphi ; \quad 1 + y'^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \sec^2 \varphi ;$$

$$(1 + y'^2)^{3/2} = |\sec^3 \varphi| = \frac{1}{|\cos^3 \varphi|}$$

Por conseguinte,

$$y'' = \frac{1}{R\,|\cos^3 \varphi|}. \tag{3}$$

Substituindo na equação (1) as expressões obtidas para y' e y'', ter-se-á

$$\frac{1}{R\,|\cos^3 \varphi|} = f(x, y, \operatorname{tg} \varphi),$$

ou

$$R = \frac{1}{|\cos^3 \varphi| \cdot f(x, y, \operatorname{tg} \varphi)}. \tag{4}$$

Fig. 266

o que mostra que uma equação diferencial de segunda ordem determina a grandeza do raio de curvatura da curva integral, uma vez dadas as coordenadas do ponto e a direcção da tangente neste ponto.

Daqui resulta um método de construção aproximada duma curva integral que admite uma tangente contínua (*) em cada ponto; a curva é constituída por arcos de círculos.

Assim, suponhamos que se deve traçar a curva integral da equação (1) que satisfaça às condições iniciais:

$$y_{x=x_0} = y_0 ; \quad y'_{x=x_0} = y'_0.$$

Tracemos pelo ponto $M_0(x_0, y_0)$ um raio M_0T_0 de declive $y = \operatorname{tg} \varphi_0 = y'_0$ (fig. 266). Deduz-se da equação (4) $R = R_0$. Consideremos um segmento M_0C_0 de comprimento R_0 sobre a perpendicular à direcção M_0T_0 e tracemos do ponto C tomado para centro um pequeno arco de círculo $\widehat{M_0M_1}$ de raio R_0. Notemos que será preciso considerar o segmento M_0C_0 do lado conveniente para que o arco de círculo seja convexo para cima quando $R_0 < 0$ e que seja convexa para baixo quando $R_0 > 0$ (ver nota pág. 73).

(*) Isto é, que o declive é uma função contínua do arco s.

Seja, em seguida, um ponto $M_1(x_1, y_1)$ sobre o arco da curva construído, suficientemente vizinho de M_0 e seja $\operatorname{tg}\varphi_1$ o declive da tangente M_1T_1 à curva no ponto M_1. Deduzamos da equação (4) o valor $R = R_1$ correspondente a M_1. Tracemos o segmento M_1C_1, igual a R_1, perpendicularmente a M_1T_1 e, de C_1 como centro, tracemos um arco $\overset{\frown}{M_1M_2}$ de raio R_1. Tomemos em seguida sobre este arco um ponto $M_2(x_2, y_2)$, vizinho de M_1, e continuemos a nossa construção até que se obtenha uma porção de curva suficientemente grande formada de arcos de círculos. Resulta do anterior que esta curva é aproximadamente uma curva integral que passa pelo ponto M_0. É evidente que a curva constante será tanto mais aproximada da curva integral quanto mais pequenos forem os arcos $\overset{\frown}{M_0M_1}$, $\overset{\frown}{M_1M_2}$, . . .

§ 20. Equações Lineares homogéneas. Definições e propriedades gerais

Definição — 1. Uma equação diferencial de ordem n diz-se *linear* se é do primeiro grau em relação à função desconhecida y e às suas derivadas y', ..., $y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$, isto é, se ela é da forma

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = f(x), \tag{1}$$

em que a_0, a_1, . . . , a_n $f(x)$ são funções de x dadas ou constantes e $a_0 \neq 0$ qualquer que seja x no domínio de definição da equação (1). Suporemos, no seguimento, que as funções a_0, a_1, ..., a_n e $f(x)$ são contínuas para todos os valores de x e que $a_0 \neq 1$ (senão bastará dividir todos os termos por a_0). A função $f(x)$ chama-se o *segundo membro da equação.*

Se $f(x) \neq 0$, a equação diz-se *não homogénea* ou ainda, com *segundo membro.* Se $f(x) = 0$, a equação escreve-se

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0 \tag{2}$$

e diz-se *homogénea* ou *sem segundo membro* (o primeiro membro desta equação é uma função homogénea do primeiro grau em relação a y, y', y'', ..., $y^{(n)}$).

Estabeleçamos algumas propriedades fundamentais das equações lineares homogéneas, cingindo-nos às demonstrações das equações de segunda ordem.

Teorema — 1. *Se y_1 e y_2 forem duas soluções particulares da equação linear homogénea de segunda ordem*

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0, \tag{3}$$

$y_1 + y_2$ também é solução desta equação.

Demonstração — Dado que y_1 e y_2 são soluções da equação proposta, tem-se

$$\left.\begin{array}{l} y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0, \\ y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Substituindo a soma $y_1 + y_2$ na equação (3) e tomando as identidades (4) em consideração, ter-se-á

$$(y_1 + y_2)'' + a_1 (y_1 + y_2)' + a_2 (y_1 + y_2) =$$
$$= (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = 0 + 0 = 0,$$

o que demonstra que $y_1 + y_2$ é solução da equação.

Teorema — 2. *Se y_1 for solução da equação* (3) *e se C for uma constante, Cy_1 é também uma solução desta equação.*

Demonstração — Substituindo na equação (3) a expressão Cy_1, obtém-se:

$$(Cy_1)'' + a_1 (Cy_1)' + a_2 (Cy_1) = C (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) = C \cdot 0 = 0;$$

e o teorema fica demonstrado.

Definição — 2. Duas soluções y_1 e y_2 de (3) dizem-se linearmente independentes sobre o segmento $[a, b]$ se a sua relação não for constante sobre este segmento, isto é, se

$$\frac{y_1}{y_2} \neq \text{constante}.$$

Senão, as soluções dizem-se *linearmente dependentes*. Por outras palavras, duas soluções y_1 *e* y_2 dizem-se *linearmente dependentes*, sobre o segmento $[a, b]$, se existir uma constante λ tal que $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Tem-se, então, $y_1 = \lambda y_2$.

Exemplo — Seja a equação $y'' - y = 0$. Verifica-se fàcilmente que as funções e^x, e^{-x}, $3e^x$, $5e^{-x}$ são soluções desta equação. As funções e^x e e^{-x} são linearmente independentes em todo o segmento, dado que a relação $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$ não permanece constante quando x varia.

As funções e^x e $3e^x$, essas, são linearmente dependentes, pois $\frac{3e^x}{e^x} = 3 = \text{const.}$

Definição — 3. Sendo y_1 e y_2 função de x, o determinante

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

chama-se *determinante de Wronski* ou *wronskien* das funções dadas.

Teorema — 3. *Se as funções* y_1 *e* y_2 *forem linearmente dependentes sobre o segmento* $[a, b]$, *o seu wronskien é idênticamente nulo nesse segmento.*

Con efeito, se $y_2 = \lambda y_1$, onde $\lambda = \text{const}$, $y_2' = \lambda y_1'$ e

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0.$$

Teorema — 4. *Se o determinante de Wronski* $W(y_1, y_2)$ *das soluções* y_1 *e* y_2 *da equação* (3) *não for nulo no ponto* $x = x_0$ *do segmento* $[a, b]$ *onde os coeficientes da equação são contínuos, ele não se anula em qualquer parte daquele segmento.*

Demonstração — Sendo y_1 e y_2 duas soluções da equação (3), tem-se

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0, \qquad y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0.$$

Multiplicando os termos da primeira igualdade por y_1, os da segunda por $-y_2$ e juntando, obtém-se:

$$(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) + a_1 (y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0. \tag{5}$$

O coeficiente de a_1 em (5) é o wronskien $W(y_1, y_2)$ e precisamente $W(y_1, y_2) = (y_1 y_2' - y_1' y_2)$. O primeiro termo é a derivada do wronskien:

$$W_x'(y_1, y_2) = (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2.$$

Por conseguinte, a igualdade (5) escreve-se

$$W' + a_1 W = 0. \tag{6}$$

Achemos a solução da primeira equação que satisfaça à condição inicial $W \mid_{x=x_0} = W_0$. Encontremos, em primeiro lugar, a solução geral da equação (6) supondo $W \neq 0$. Separando as variáveis na equação (6), obtém-se $\frac{dW}{W} = -a_1\, dx$. Integrando, vem

$$\operatorname{Log} W = -\int_{x_0}^{x} a_1\, dx + \operatorname{Log} C$$

ou

$$\operatorname{Log} \frac{W}{C} = -\int_{x_0}^{x} a_1\, dx,$$

donde

$$W = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a_1\, dx} \qquad (7)$$

Há que notar que a função (7) se pode escrever e que verifica a equação (6), do que se pode fàcilmente comprovar pela substituição directa desta função na equação (6). A hipótese $W \neq 0$, já não é indispensável. A fórmula (7) chama-se *fórmula de Liouville.*

Determinemos C de modo que seja verificada a condição inicial. Fazendo $x = x_0$ no primeiro e segundo membros da igualdade (7), achamos

$$W_0 = C.$$

Por conseguinte, a solução que verifica as condições iniciais será da forma

$$(W) = W_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a_1\, dx} \quad . \qquad (7')$$

Para a hipótese $W_0 \neq 0$. Resulta, então, da igualdade (7) que $W \neq 0$ qualquer que seja x porque a exponencial não se pode anular para valores finitos da variável. O teorema está demonstrado.

Nota — 1. Se o wronskien for nulo para um certo valor $x = x_0$ é, então, nulo para qualquer valor x do segmento considerado. Tal resulta directamente da fórmula (7): se $W = 0$ para $x = x_0$, então,

$$(W)_{x=x_0} = C = 0;$$

Por conseguinte, $W = 0$ qualquer que seja o valor do limite superior x na fórmula (7).

Teorema — 5. *Se as soluções y_1 e y_2 da equação* (3) *forem linearmente independentes entre o segmento* $[a, b]$, *o determinante de Wronski formado com estas soluções não se anula em nenhum ponto deste segmento.*

Indiquemos a ideia da demonstração deste teorema sem a dar completamente.

Suponhamos que $W = 0$ num certo ponto do segmento; em virtude do teorema 3, o wronskien será nulo em todos os pontos do segmento $[a, b]$:

$$W = 0$$

ou

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0.$$

Consideremos, em primeiro lugar, os intervalos contidos no segmento $[a, b]$ nos quais $y_1 \neq 0$. Então,

$$\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = 0$$

ou

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0.$$

Por conseguinte, a relação $\frac{y_2}{y_1}$ é constante em cada um dos intervalos mencionados

$$\frac{y_2}{y_1} = \lambda = \text{const.}$$

Reportando-nos ao teorema de existência e da unicidade, pode-se demonstrar que $y_2 = \lambda y_1$ para todos os pontos do segmento $[a, b]$, compreendendo aqueles em que $y_1 = 0$, o que é impossível, porque, por hipótese, y_1 e y_2, são linearmente independentes. Por conseguinte, o wronskien não se anula em nenhum ponto do segmento $[a, b]$.

Teorema — 6. *Se y_1 e y_2 forem duas soluções linearmente independentes da equação* (3), *então,*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{8}$$

em que C_1 e C_2 são constantes arbitrárias, é a solução geral desta equação.

Demonstração — Resulta do teorema 1 e 2 que a função

$$C_1 y_1 + C_2 y_2$$

é a solução da equação (3), quaisquer que sejam as constantes C_1 e C_2.

Mostremos agora que, quaisquer que sejam as condições iniciais $y_{x=x_0} = y_0$, $y'_{x=x_0} = y'_0$, é possível escolher valores das constantes C_1 e C_2 de modo que a solução particular correspondente $C_1 y_1 + C_2 y_2$ satisfaça às condições iniciais.

Substituindo as condições iniciais na igualdade (8), tem-se

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= C_1 y_{10} + C_2 y_{20}, \\ y'_0 &= C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

em que se fez

$$(y_1)_{x=x_0} = y_{10}; \quad (y_2)_{x=x_0} = y_{20};$$
$$(y'_1)_{x=x_0} = y'_{10}; \quad (y'_2)_{x=x_0} = y'_{20}.$$

Pode-se tirar C_1 e C_2 do sistema (9), porque o determinante deste sistema

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} = y_{10}y'_{20} - y'_{10}y_{20}$$

é o determinante de Wronski para $x = x_0$ e não é, pois, nulo (dado que as soluções y_1 e y_2 são linearmente independentes). A solução particular deduzida da família (8) substituindo C_1 e C_2 pelos valores encontrados satisfaz às condições iniciais dadas. O teorema está demonstrado.

Exemplo — 2. A equação

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0,$$

cujos coeficientes $a_1 = \frac{1}{x}$ e $a_2 = -\frac{1}{x^2}$ são contínuos em todo o segmento que não contenha o ponto $x = 0$, admite as soluções particulares

$$y_1 = x, \quad y_2 = \frac{1}{x}$$

(é fácil de verificar substituindo na equação). A solução geral é pois

$$y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x}.$$

Nota — 2. Não existe método geral que permita encontrar sob forma finita a solução geral de uma equação diferencial linear de coeficientes variáveis. Todavia, existe um tal método para as equações de coeficientes constantes. Será objecto do parágrafo seguinte. No que respeita às equações cujos coeficientes são variáveis, indicar-se-á no capítulo XVI «Séries», vários processos que permitem encontrar soluções aproximadas que satisfaçam às condições iniciais.

Vamos demonstrar agora um teorema que permite encontrar a solução geral de uma equação diferencial de segunda ordem de coeficientes variáveis conhecido que seja uma solução particular.

Como sucede por vezes encontrar ou advinhar directamente uma solução particular, este teorema pode ser muito útil em muitos casos.

Teorema — 7. *Se se conhecer uma solução particular duma equação diferencial linear homogénea de segunda ordem, a procura da solução geral reduz-se às quadraturas.*

Demonstração — Seja y_1 uma solução particular conhecida da equação

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Achemos uma outra solução particular da equação proposta tal que y_1 e y_2 sejam linearmente independentes. A solução geral escrever-se-á, então, $y = C_1y_1 + C_2y_2$, em que C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. Pode-se escrever, em virtude da fórmula (7) (ver a demonstração do teorema 4):

$$y_2'y_1 - y_2y_1' = Ce^{-\int a_1\,dx}$$

Por conseguinte, tem-se para a determinação de y_2 uma equação linear de primeira ordem. Integremo-la como se segue. Dividamos todos os termos por y_1^2:

$$\frac{y_2'y_1 - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int a_1\,dx}$$

ou

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int a_1\,dx};$$

donde

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{Ce^{-\int a_1\,dx}}{y_1^2}\,dx + C'.$$

Como procuramos uma solução particular, ter-se-á, fazendo $C = 0$, $C = 1$:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1\,dx}}{y_1^2}\,dx. \tag{10}$$

É evidente que y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes, porque $\frac{y_2}{y_1} \neq \text{const.}$

A solução geral da equação proposta escreve-se, pois,

$$y = C_1y_1 + C_2y_1 \int \frac{e^{-\int a_1\,dx}}{y_1^2}\,x. \tag{11}$$

Exemplo — 3. Achar a solução geral da equação

$$(1 - x^2)\,y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Resolução — Verifica-se directamente que esta equação tem por solução particular $y_1 = x$. Achemos uma segunda solução particular y_2 tal que y_1 e y_2 sejam linearmente independentes.

Notando que $a_1 = \frac{-2x}{1-x^2}$, obtém-se, em virtude da fórmula (10):

$$y = x\int \frac{e^{\int \frac{2x\,dx}{1-x^2}}}{x^2}\,dx = x\int \frac{e^{-\text{Log}\,(1-x^2)}}{x^2}\,dx = x\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} =$$

$$= x\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right) dx = x\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,\text{Log}\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]$$

A solução geral é pois

$$y = C_1 x + C_2\left(\frac{1}{2}\,x\,\text{Log}\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1\right).$$

§ 21. Equações lineares homogéneas de segunda ordem de coeficientes constantes

Seja a equação linear homogénea de segunda ordem

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{1}$$

em que p e q são constantes reais. Para encontrar o integral geral desta equação, basta, como demonstramos mais acima, encontrar duas soluções particulares linearmente independentes.

Procuremos as soluções particulares sob a forma

$$y = e^{kx}, \quad \text{ou} \quad k = \text{const}; \tag{2}$$

então,

$$y' = ke^{kx}; \qquad y'' = k^2 e^{kx}.$$

Substituamos estas expressões das derivadas na equação (1):

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Como $e^{kx} \neq 0$, deve-se ter

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{3}$$

Por conseguinte, se k é raíz da equação (3), a função e^{kx} será solução da equação (1). A equação (3) chama-se *equação característica* da equação (1).

A equação característica é uma equação de segunda ordem de que designaremos as raízes por k_1 *e* k_2. Tem-se:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Os três casos seguintes se podem apresentar:

I — k_1 e k_2 são números reais distintos ($k_1 \neq k_2$);
II — k_1 e k_2 são números complexos;
III — k_1 e k_2 são números reais iguais ($k_1 = k_2$).

Examinemos cada caso separadamente.

I — *As raízes da equação característica são reais e distintas:* $k_1 \neq k_2$.

Ter-se-á, então, para soluções particulares

$$y_1 = e^{k_1 x}; \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Estas soluções são linearmente independentes porque

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const.}$$

O integral geral escreve-se, por conseguinte,

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Exemplo — 1. Seja a equação

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

A equação característica escreve-se

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Achemos as raízes desta equação

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}\,;$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -2.$$

O integral geral é

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

II — *As raízes da equação característica são complexas.*

Dado que as raízes complexas são conjugadas, façamos

$$k_1 = \alpha + i\beta\,; \qquad k_2 = \alpha - i\beta,$$

em que

$$\alpha = -\frac{p}{2}; \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Pode-se pôr as soluções particulares sob a forma

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}; \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} \tag{4}$$

São funções complexas duma variável real que verifica a equação diferencial (1) (ver § 4, cap. VII).

É evidente que se uma função complexa de variável real

$$y = u(x) + iv(x) \tag{5}$$

verifica a equação (1), esta equação é verificada separadamente pelas funções $u(x)$ e $v(x)$.

Com efeito, substituamos a expressão (5) na equação (1):

$$[u(x) + iv(x)]'' + p[u(x) + iv(x)]' + q[u(x) + iv(x)] \equiv 0$$

ou

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) \equiv 0.$$

Mas uma função complexa apenas é nula se, e sòmente se, as partes real e imaginária o forem separadamente, isto é,

$$u'' + pu' + qu = 0,$$
$$v'' + pv' + qv = 0.$$

Acabamos de demonstrar que $u(x)$ e $v(x)$ são soluções da equação proposta.

Recopiemos as soluções complexas (4) sob a forma de soma das partes real e imaginária;

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,$$
$$y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

De acordo com o que se acaba de demonstrar, as funções reais seguintes serão soluções particulares da equação (1):

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \tag{6'}$$
$$\tilde{y}_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x. \tag{6''}$$

As funções $\tilde{y}_1$ e $\tilde{y}_2$ são linearmente independentes, porque

$$\frac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x} = \operatorname{cotg} \beta x \neq \text{const.}$$

Por conseguinte, a solução geral da equação (1), no caso em que as raízes da equação característica forem complexas, toma a forma

$$y = A\tilde{y}_1 + B\tilde{y}_2 = Ae^{\alpha x} \cos \beta x + Be^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$$

ou

$$y = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x), \tag{7}$$

em que A e B são constantes arbitrárias.

Exemplo — 2. Seja a equação

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Achar o integral geral e a solução particular que satisfaz às condições iniciais $y_{x=0} = 0$, $y'_{x=0} = 1$. Construir a curva integral correspondente.

Resoluções:

1. Escrevamos a equação característica

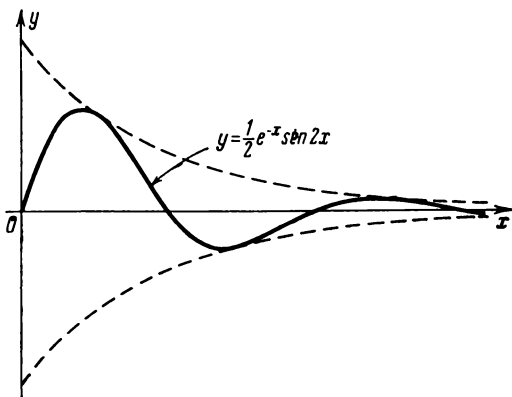
$$k^2+2k+5=0$$

e determinemos as suas raízes:

$$k_1=-1+2i,\ k_2=-1-2i.$$

O integral geral é, pois,

$$y=e^{-x}(A\cos 2x+B \text{ sen } 2x).$$

2. Achemos a solução particular que satisfaça às condições iniciais dadas; determinemos para esse efeito os correspondentes valores de A e B.

F i g. 267.

Deduz-se da primeira condição:

$$0=e^{-0}(A\cos 2\cdot 0+B \text{ sen } 2\cdot 0), \text{ donde } A=0.$$

Tendo em conta que

$$y'=e^{-x}2B\cos 2x-e^{-x}B \text{ sen } 2x,$$

deduz-se da segunda condição:

$$1=2B, \text{ ou seja } B=\frac{1}{2}.$$

A solução particular procurada é, pois,

$$y=\frac{1}{2}e^{-x} \text{ sen } 2x.$$

A curva está representada na figura 267.

III — *A equação característica admite uma raíz real dupla.*

Tem-se, então, $k_1=k_2$.

Obtém-se uma solução particular $y_1=e^{k_1x}$ em virtude dos raciocínios anteriores. É preciso encontrar uma segunda solução particular linearmente independente da primeira (a função e^{k_2x} é idênticamente

igual a e^{k_1x} e não pode ser considerada como uma segunda solução particular).

Procuraremos a segunda solução particular sob a forma

$$y_2 = u(x)\, e^{k_1 x},$$

em que $u(x)$ é uma função desconhecida que se deve determinar. Derivemos:

$$y_2' = u' e^{k_1 x} + k_1 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(u' + k_1 u),$$

$$y_2'' = u'' e^{k_1 x} + 2k_1 u' e^{k_1 x} + k_1^2 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u).$$

Obtém-se, substituindo as expressões das derivadas na equação (1):

$$e^{k_1 x}[u'' + (2k_1 + p) u' + (k_1^2 + pk_1 + q) u] = 0.$$

Como k_1 é uma raíz dupla da equação característica, tem-se

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0.$$

Além disso, $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ ou $2k_1 = -p$, $2k_1 + p = 0$.

Por conseguinte, para encontrar u (x), torna-se necessário resolver a equação $e^{k_1x}u'' = 0$ ou $u'' = 0$. Acha-se, integrando $u = Ax + B$. Pode-se fazer $A = 1$, $B = 0$; tem-se, então, $u = x$. Pode-se, pois, tomar para segunda solução a função

$$y_2 = x e^{k_1 x}.$$

Esta solução é linearmente independente da primeira, dado que $\frac{y_2}{y_1} = x \not\equiv \text{const}$. Tomar-se-á, pois, para integral geral, a função

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

Exemplo — 3. Seja a equação

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

A equação característica $k^2 - 4k + 4 = 0$ tem por raízes $k_1 = k_2 = 2$. O integral geral escreve-se:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

§ 22. Equações diferenciais lineares homogéneas de ordem n de coeficientes constantes

Consideremos uma equação diferencial linear homogénea de ordem n:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \qquad (1)$$

Suporemos que a_1, a_2, ..., a_n são constantes. Antes de indicar um método de resolução da equação (1), daremos duas definições que nos serão úteis no seguimento.

Definição — 1. Se se tiver para todo o x do segmento $[a, b]$, a igualdade

$$\varphi_n(x) = A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + \ldots + A_{n-1}\varphi_{n-1}(x),$$

em que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são constantes, não todas nulas, diz-se que $\varphi_n(x)$ *é uma combinação linear das funções* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$.

Definição — Dizem-se *linearmente independentes n* funções $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x), \varphi_n(x)$ se nenhuma delas puder ser representada como combinação linear das outras.

Nota — 1. Resulta destas definições que se as funções $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ forem linearmente dependentes, existem, então, constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, não todas nulas, e tais que se tem, quaisquer que seja x sobre o segmento $[a, b]$,

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) \equiv 0.$$

Exemplos:

1. As funções $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = 3e^x$ são linearmente dependentes, porque se tem para $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = -\frac{1}{3}$ a identidade

$$C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3 3e^x \equiv 0.$$

2. As funções $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$ são linearmente independentes, porque não se pode anular idênticamente a expressão

$$C_1 \cdot 1 + C_2x + C_3x^2$$

com C_1, C_2, C_3 não todos nulos.

3. As funções $y_1 = e^{k_1x}, y_2 = e^{k_2x}, \ldots, y_n = e^{k_nx}, \ldots$, com $k_1, k_2, \ldots k_n, \ldots$ arbitrários, são linearmente independentes (não demonstraremos esta proposição).

Passemos agora à solução da equação (1). Para esta equação tem-se o seguinte teorema.

Teorema — *Se as funções* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *forem soluções linearmente indepnedentes da equação* (1), *a sua solução geral é da forma*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n, \tag{2}$$

em que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *são constantes arbitrárias.*

Se os coeficientes da equação (1) forem constantes, acha-se a solução geral tal como para a equação de segunda ordem.

1 — Forma-se a equação característica

$$k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

2 — Acham-se as raízes da equação característica

$$k_1, k_2, \ldots, k_n.$$

3 — De acordo com o carácter das raízes escrevem-se as soluções particulares, linearmente independentes, partindo do que se segue:

a) corresponde a toda a raíz real simples k, uma solução particular e^{kx};

b) corresponde a todo o par de raízes complexas conjugadas $k^{(1)} = \alpha + i\beta$ e $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ duas soluções particulares $e^{\alpha x} \cos \beta x$ e $e^{\alpha x}$ sen βx·

c) corresponde a toda a raíz real k de ordem de multiplicidade r tantas soluções lineares independentes

$$e^{kx}, \; xe^{kx}, \; \ldots, \; x^{r-1}e^{kx};$$

d) corresponde a todo o par de raízes complexas conjugadas $k^{(1)} = \alpha + i\beta$, $k^{(2)} = \alpha - i\beta$, de ordem de multiplicidade μ, 2μ soluções particulares

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \; xe^{\alpha x} \cos \beta x, \; \ldots, \; x^{\mu-1}e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, \; xe^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, \; \ldots, \; x^{\mu-1}e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

O número destas soluções é igual ao grau da equação característica (que também é a ordem da equação diferencial proposta). Demonstra-se que estas soluções são linearmente independentes.

4 — Tendo encontrado n soluções linearmente independentes y_1, y_2, ..., y_n, escreve-se a solução geral da equação diferencial proposta sob a forma

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

onde C_1, C_2, ..., C_n são constantes arbitrárias.

Exemplo — 4. Encontrar a solução geral da equação

$$y^{IV} - y = 0.$$

Resolução — Formemos a equação característica

$$k^4 - 1 = 0.$$

As raízes desta equação são

$$k_1 = 1, \; k_2 = -1, \; k_3 = i, \; k_4 = -i.$$

O integral geral, é pois,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + A \cos x + B \operatorname{sen} x,$$

em que C_1, C_2, A, B são constantes arbitrárias.

Nota — 2. Resulta do que precede que toda a dificuldade da resolução duma equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes reside na resolução da equação característica correspondente.

§ 23. Equações lineares não homogéneas de segunda ordem

Seja uma equação linear não homogénea de segunda ordem

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \tag{1}$$

A estrutura da solução geral da equação (1) é dada pelo teorema seguinte.

Teorema — 1. *A solução geral da equação não homogénea* (1) *é a soma duma solução particular qualquer* y^* *desta equação e da solução geral* $\bar{y}$ *da equação homogénea correspondente*

$$\bar{y}'' + a_1\bar{y}' + a_2\bar{y} = 0. \tag{2}$$

Demonstração — Deve-se demonstrar que a soma

$$y = \bar{y} + y^* \tag{3}$$

é a solução geral da equação (1). Demonstremos, em primeiro lugar, que a função (3) é uma solução da equação (1).

Substituamos a soma $\bar{y} + y^*$ na equação (1) em vez de y. Ter-se-á:

$$(\bar{y} + y^*)'' + a_1(\bar{y} + y^*)' + a_2(\bar{y} + y^*) = f(x)$$

ou

$$(\bar{y}'' + a_1\bar{y}' + a_2\bar{y}) + (y^{*''} + a_1 y^{*'} + a_2 y^*) = f(x). \tag{4}$$

Sendo $\bar{\bar{y}}$ solução da equação (2), a expressão do primeiro parêntesis é idênticamente nula. Sendo y^* uma solução da equaçção (1), a expressão do segundo parêntesis é igual a $f(x)$. A igualdade (4) é pois uma identidade. A primeira parte do teorema está assim demonstrada.

Mostremos agora que a expressão (3), é a solução geral da equação (1), isto é, que se pode escolher as constantes arbitrárias que ela contenha, de maneira a que sejam satisfeitas as condições iniciais:

$$\left.\begin{aligned} y_{x=x_0} &= y_0, \\ y'_{x=x_0} &= y'_0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

quaisquer que sejam x_0, y_0 e y'_0 (desde que x_0 seja tomado no domínio de continuidade das funções a_1, a_2 e $f(x)$).

Tendo em atenção que se pode pôr $\bar{y}$ sob a forma

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

em que y_1 e y_2 são duas soluções linearmente independentes da equação (2) e C_1 e C_2 constantes arbitrárias, pode-se recopiar a igualdade (3) sob a forma

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*. \tag{3'}$$

Resulta das condições (5) que (*)

$$C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + y_0^* = y_0,$$

$$C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} + y_0^{*\prime} = y'_0.$$

É-nos preciso deduzir C_1 e C_2 deste sistema. Recopiemo-lo sob a forma

$$\left.\begin{aligned} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} &= y_0 - y_0^*, \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} &= y'_0 - y_0^{*\prime}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Note-se que o determinante dos coeficientes das incógnitas C_1 e C_2 é o wronskien das funções y_1 e y_2 calculado no ponto $x = x_0$. Dado que estas funções são linearmente independentes, por hipótese, o wronskien não é nulo; o sistema (6) possui, pois, uma solução bem determinada C_1 e C_2, isto é, que existem constantes C_1 e C_2 tais que a fórmula (3) define a solução da equação (1) que satisfaz às condições iniciais dadas. O teorema está completamente demonstrado.

Por conseguinte, se se conhecer a solução geral $\bar{y}$ da equação sem segundo membro (2) o problema reside em encontrar uma solução particular qualquer y^* da equação com segundo membro (1).

Indiquemos um método geral que permita encontrar soluções particulares duma equação com segundo membro.

Método da variação das constantes — Escrevamos a solução geral da equação homogénea (2):

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \tag{7}$$

Vamos procurar uma solução particular da equação não homogénea (1) sob a forma (7), tendo em consideração que C_1 e C_2 são *funções* de x que é preciso determinar.

(*) Aqui y_{10}, y_{20}, y_0^*, y'_{10}, y'_{20}, $y_0^{*\prime}$ são valores que tomam as funções y_1, y_2, y^*, y'_1, y'_2, $y^{*\prime}$ para $x = x_0$.

Derivemos a igualdade (7):

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_1' y_1 + C_2' y_2.$$

Escolhamos as funções C_1 e C_2 de maneira que seja satisfeita a igualdade

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0. \tag{8}$$

Sendo assim, a derivada primeira y' torna-se

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'.$$

Derivando agora esta expressão, acha-se y'':

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2'.$$

Substituamos y, y', y'' na equação (1). Obtém-se:

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' + a_1 (C_1 y_1' + C_2 y_2') + $$
$$+ a_2 (C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x)$$

ou

$$C_1 (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + C_2 (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) +$$
$$+ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

As expressões contidas nos dois primeiros parêntesis anulam-se pelo facto de y_1 e y_2 serem soluções da equação homogénea. Por conseguinte, esta última igualdade, toma a forma

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \tag{9}$$

Assim, a função (7) é uma solução da equação com segundo membro (1) visto que as funções C_1 e C_2 satisfazem às equações (8) e (9), isto é, se se tiver

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \quad C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Ora o determinante deste sistema é o wronskien das funções linearmente independentes y_1 e y_2, pois que não é nulo; calcula-se C_1' e C_2' como funções de x resolvendo o sistema anterior:

$$C_1' = \varphi_1(x), \quad C_2' = \varphi_2(x).$$

Integrando, calcula-se:

$$C_1 = \int \varphi_1(x)\, dx + \bar{C}_1; \quad C_2 = \int \varphi_2(x)\, dx + \bar{C}_2,$$

em que $\bar{C}_1$ e $\bar{C}_2$ são constantes de integração.

Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na igualdade (7), acha-se um integral dependente de duas constantes arbitrárias $\overline{C}_1$ e $\overline{C}_2$, isto é, a solução geral da equação com segundo membro (*).

Exemplo — Determinar a solução geral da equação

$$y'' - \frac{y'}{x} = x.$$

Resolução — Determinemos a solução geral da equação homogénea

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0.$$

Tem-se:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}, \quad \operatorname{Log} y' = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} C; \quad y' = Cx;$$

assim,

$$y = C_1 x^2 + C_2.$$

Para que esta expressão seja solução da equação proposta, é preciso determinar C_1 e C_2 como funções de x do sistema

$$C_1' x^2 + C_2' \cdot 1 = 0, \qquad 2C_1' x + C_2' \cdot 0 = x.$$

Resolvendo este sistema, vem

$$C_1' = \frac{1}{2}, \qquad C_2' = -\frac{1}{2} x^2,$$

e por integração:

$$C_1 = \frac{x}{2} + \overline{C}_1, \quad C_2 = -\frac{x^3}{6} + \overline{C}_2.$$

Substituindo as funções encontradas na fórmula $y = C_1 x^2 + C_2$, obtém-se a solução geral da equação com segundo membro:

$$y = \overline{C}_1 x^2 + \overline{C}_2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6}$$

ou $y = \overline{C}_1 x^2 + \overline{C}_2 + \frac{x^3}{3}$, em que $\overline{C}_1$ e $\overline{C}_2$ são constantes arbitrárias.

O teorema seguinte pode ser útil para a procura de soluções particulares.

Teorema — 2. *Seja uma equação não homogénea*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x) \tag{10}$$

cujo segundo membro é a soma de duas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$. Se y_1 for uma solução particular da equação

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) \tag{11}$$

(*) Se se fizer $\overline{C}_1 = \overline{C}_2 = 0$, obtém-se uma solução particular da equação (1).

e y_2 *uma solução particular da equação*

$$y'' + a_1y' + a_2y = f_2(x), \tag{12}$$

$y_1 + y_2$ *é uma solução particular* (*) *da equação* (10).

Demonstração — Substituindo a expressão $y_1 + y_2$ na equação (10), obtém-se:

$$(y_1 + y_2)'' + a_1(y_1 + y_2)' + a_2(y_1 + y_2) = f_1(x) + f_2(x)$$

ou

$$(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + (y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) = f_1(x) + f_2(x). \tag{13}$$

Resulta das igualdades (11) e (12) que (13) é uma identidade. O teorema está demonstrado.

§ 24. Equações lineares não homogéneas de segunda ordem de coeficientes constantes

Seja a equação diferencial

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{1}$$

em que p e q são números reais.

Indicou-se no parágrafo anterior um método geral de procura das soluções das equações não homogéneas. Quando a equação é de coeficientes constantes, por vezes é mais simples encontrar uma solução particular sem integração. Consideremos tipos de equações (1) às quais se aplica esta nota.

I — Suponhamos que o segundo membro da equação (1) é o produto dum exponencial por um polinómio:

$$f(x) = P_n(x)\,e^{\alpha x}, \tag{2}$$

em que $P_n(x)$ é um polinómio do grau n. Os casos seguintes podem-se apresentar:

a) O número α *não é uma raíz* da equação característica

$$k^2 + pk + q = 0.$$

É preciso, então, procurar a solução particular sob a forma

$$y^* = (A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n)\,e^{\alpha x} = Q_n(x)\,e^{\alpha x}. \tag{3}$$

Com efeito, substituindo y^* na equação (1) e simplificando por $e^{\alpha x}$, ter-se-á

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)\,Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)\,Q_n(x) = P_n(x). \tag{4}$$

(*) É evidente que este teorema subsiste para um número arbitrário de termos no segundo membro.

$Q_n(x)$ é um polinómio de grau n, $Q'_n(x)$ e $Q''_n(x)$ são, respectivamente, polinómios de graus $n-1$ e $n-2$. Tem-se, pois, dum lado e doutro da igualdade polinómios de grau n. Igualando os coeficientes das mesmas potências de x (o número de coeficientes desconhecidos é igual a $n+1$), obtém-se um sistema de $n+1$ equações para a determinação dos coeficientes A_0, A_1, A_2, ..., A_n.

b) α é uma raíz simples da equação característica.

Se se procurasse, então, uma solução particular sob a forma (3), obter-se-ia no primeiro membro da igualdade (4) um polinómio de grau $n-1$, dado que o coeficiente de $Q_n(x)$, quer $\alpha^2 + p\alpha + q$, é nulo e que $Q'_n(x)$ e $Q''_n(x)$ são polinómios de graus inferiores a n. Por conseguinte, a igualdade (4) não poderia ser uma identidade qualquer que seja a escolha das constantes A_0, A_1, A_2, ..., A_n.

Então, no caso considerado, procurar-se-á a solução particular sob a forma de polinómio de grau $n+1$ privado do seu termo constante (porque este último desaparece após a derivação) (*):

$$y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}.$$

c) α é uma *raíz dupla* da equação característica. O grau do polinómio baixa, então, de duas unidades quando se substitui a função $Q_n(x)e^{\alpha x}$ na equação diferencial. Com efeito, sendo α uma raíz da equação característica, $\alpha^2 + \alpha p + q = 0$; além disso, sendo α raíz dupla, tem-se $2\alpha = -p$ (sabe-se, efectivamente, que a soma das raízes da equação do segundo grau escrita acima é igual ao coeficiente do termo do primeiro grau tomado com o sinal menos). Assim, $2\alpha + p = 0$.

Resta, pois, no primeiro membro da igualdade (4) $Q''_n(x)$, isto é, um polinómio de grau $n-2$. Para que o resultado da substituição seja um polinómio de grau n, torna-se necessário procurar uma solução particular sob a forma de produto de $e^{\alpha x}$ por um polinómio de de grau $n+2$. A constante e o termo do primeiro grau deste polinómio desaparecem então, após derivação e poder-se-á omitir na solução particular.

Assim, quando α é uma raíz dupla da equação característica, procurar-se-á uma solução particular sob a forma

$$y^* = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}.$$

Exemplo — 1. Achar a solução geral da equação

$$y'' + 4y' + 3y = x.$$

Resolução — A solução geral da equação homogénea correspondente é

$$\bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}.$$

(*) Notemos que todos os resultados acima são válidos quando α é um número complexo (isto resulta das regras de derivação da função e^{mx}, dado que m é um número complexo arbitrário; ver § 4, Cap. VII).

Como o segundo membro da equação não homogénea é da forma xe^{0x} (isto é, da forma $P_1(x)e^{0x}$) e não sendo 0 raíz da equação característica $k^2+4k+3=0$, procuraremos uma solução particular sob a forma $y^*=Q_1(x)e^{0x}$, isto é, que façamos

$$y^*=A_0x+A_1.$$

Substituamos esta expressão na equação proposta. Tem-se:

$$4A_0+3(A_0x+A_1)=x.$$

Deduz, igualando os coeficientes das mesmas potências de x dum e doutro lado da igualdade:

$$3A_0=1, \quad 4A_0+3A_1=0,$$

donde

$$A_0=\frac{1}{3}; \quad A_1=-\frac{4}{9}.$$

Por conseguinte,

$$y^*=\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}.$$

A solução geral $y=\bar{y}+y^*$ será

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}.$$

Exemplo — 2. Achar a solução geral da equação

$$y''+9y=(x^2+1)e^{3x}.$$

Resolução — Encontra-se fàcilmente a solução geral da equação

$$\bar{y}=C_1\cos 3x+C_2\,\mathrm{sen}\,3x.$$

O segundo membro da equação dada $(x^2+1)e^{3x}$ é da forma

$$P_2(x)e^{3x}.$$

Como o coeficiente 3 no expoente não é uma raíz da equação característica, procuramos uma solução particular sob a forma

$$y^*=Q_2(x)e^{3x} \text{ ou } y^*=(Ax^2+Bx+C)e^{3x}.$$

Substituamos esta expressão na equação diferencial:

$$[9(Ax^2+Bx+C)+6(2Ax+B)+2A+9(Ax^2+Bx+C)]e^{3x}=(x^2+1)e^{3x}.$$

Simplificando por e^{3x} e igualando os coeficientes das mesmas potências de x, obtém-se:

$$18A=1, \quad 12A+18B=0, \quad 2A+6B+18C=1,$$

donde, $A=\frac{1}{18}$; $B=-\frac{1}{27}$; $C=\frac{5}{81}$. A solução particular é, pois,

$$y^*=\left(\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{27}x+\frac{5}{81}\right)e^{3x}$$

e a solução geral

$$y=C_1\cos 3x+C_2\,\mathrm{sen}\,3x+\left(\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{27}x+\frac{5}{81}\right)e^{3x}.$$

Exemplo — 3. Resolver a equação

$$y''-7y'+6y=(x-2)\,e^{x}.$$

Resolução — Aqui o segundo membro é da forma $P_1(x)\,e^{1\cdot x}$, em que o 1 do expoente é uma raíz simples do polinómio característico. Procuraremos, pois, uma solução particular sob a forma

$$y^{*}=xQ_1(x)\,e^{x} \text{ ou } y^{*}=x\,(Ax+B)\,e^{x}\,;$$

Substituindo esta expresão na equação, tem-se:

$$[(Ax^2+Bx)+(4Ax+2B)+2A-7\,(Ax^2+Bx)-$$
$$-7\,(2Ax+B)+6\,(Ax^2+Bx)]\,e^{x}=(x-2)\,e^{x},$$

ou ainda

$$(-10Ax-5B+2A)\,e^{x}=(x-2)\,e^{x}.$$

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x, vem

$$-10A=1, \quad -5B+2A=-2,$$

donde $A=-\frac{1}{10}$, $B=\frac{9}{25}$. Tem-se, pois, para solução particular

$$y^{*}=x\left(-\frac{1}{10}x+\frac{9}{25}\right)e^{x},$$

e a solução geral escreve-se

$$y=C_1e^{6x}+C_2e^{x}+x\left(-\frac{1}{10}x+\frac{9}{25}\right)e^{x}.$$

II — Suponhamos o segundo membro da forma

$$f(x)=P(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta x+Q(x)\,e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \tag{5}$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios.

Pode-se examinar este caso como o anterior passando as funções trigonométricas a exponenciais. Substituamos $\cos\beta x$ e $\operatorname{sen}\beta x$ pelas suas expressões exponenciais dadas pelas fórmulas de Euler (ver § 5, cap. VII). Obtém-se:

$$f(x)=P(x)\,e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}+Q(x)\,e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i}$$

ou

$$f(x)=\left[\frac{1}{2}P(x)+\frac{1}{2i}Q(x)\right]e^{(\alpha+i\beta)x}+$$
$$+\left[\frac{1}{2}P(x)-\frac{1}{2i}Q(x)\right]e^{(\alpha-i\beta)x}. \tag{6}$$

Tem-se nos parêntesis rectos polinómios cujo grau é igual ao grau mais elevado de $P(x)$ ou de $Q(x)$. Vê-se que o segundo membro foi posto sob a forma do caso I.

Mostra-se (não o demonstraremos) que se podem encontrar soluções particulares que não contenham quantidades complexas. Por conseguinte, quando o segundo membro da equação (1) é da forma

$$f(x) = P(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x) e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, \tag{7}$$

sendo $P(x)$ e $Q(x)$ polinómios, determina-se como se segue, a forma da solução particular:

a) se $\alpha + i\beta$ não é raíz da equação característica, é preciso procurar uma solução particular da equação (1) sob a forma

$$y^* = U(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x) e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x, \tag{8}$$

sendo $U(x)$ e $V(x)$ polinómios cuja grau é igual ao grau mais elevado de $P(x)$ ou de $Q(x)$;

b) se $\alpha + i\beta$ é raíz da equação característica, tomar-se-á uma solução particular sob a forma

$$y^* = x[U(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x) e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x]. \tag{9}$$

Para evitar possíveis erros, notemos que as formas indicadas das soluções particulares (8) e (9) são evidentemente conservadas também no caso em que o segundo membro da equação (1), um dos polinómios $P(x)$ e $Q(x)$ é um polinómio idênticamente nulo, isto é, quando o segundo membro é da forma

$$P(x) e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ ou } Q(x) e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

Consideremos, em seguida, um caso particular importante. Suponhamos que o segundo membro duma equação linear de segunda ordem é da forma

$$f(x) = M \cos \beta x + N \operatorname{sen} \beta x, \tag{7'}$$

em que M e N são constantes.

a) Se βi não é raíz da equação característica, procurar-se-á uma solução particular sob a forma

$$y^* = A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x. \tag{8'}$$

b) Se βi é raíz da equação característica, procurar-se-á uma solução particular sob a forma

$$y^* = x(A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x). \tag{9'}$$

Notemos que a função (7') é um caso particular da função (7) ($P(x) = M$, $Q(x) = N$, $\alpha = 0$); as funções (8') e (9') são casos particulares das funções (8) e (9).

Exemplo — 4. Determinar o integral geral da equação linear não homogénea

$$y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x.$$

Resolução — A equação característica $k^2 + 2k + 5 = 0$ tem por raízes $k_1 = -1 + 2i$, $k_2 = -1 - 2i$. O integral geral da equação homogénea correspondente escreve-se pois

$$\bar{y} = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \text{ sen } 2x).$$

Procuremos uma solução particular da equação com segundo membro sob a forma

$$y^* = A \cos x + B \text{ sen } x,$$

sendo A e B constantes a determinar.

Substituamos y^* na equação proposta. Tem-se:

$$-A \cos x - B \text{ sen } x + 2(-A \text{ sen } x + B \cos x) + 5(A \cos x + B \text{ sen } x) = 2 \cos x.$$

Igualando os coeficientes de $\cos x$ e de $\text{sen } x$, obtém-se duas equações para determinar A e B:

$$-A + 2B + 5A = 2 \text{ ; } \quad -B - 2A + 5B = 0,$$

donde $A = \frac{2}{5}$, $B = \frac{1}{5}$.

A solução geral da equação proposta $y = \bar{y} + y^*$, é

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \text{ sen } 2x) + \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \text{ sen } x.$$

Exemplo — 5. Resolver a equação

$$y'' + 4y = \cos 2x.$$

Resolução — As raízes da equação característica são $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$; a solução geral da equação homogénea é, pois,

$$\bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \text{ sen } 2x.$$

Procuremos uma solução particular da equação com segundo membro sob a forma

$$y^* = x (A \cos 2x + B \text{ sen } 2x).$$

Tem-se: $y^{*\prime} = 2x(-A \text{ sen } 2x + B \cos 2x) + (A \cos 2x + B \text{ sen } 2x)$,

$$y^{*\prime\prime} = -4x(-A \cos 2x - B \text{ sen } 2x) + 4(-A \text{ sen } 2x + B \cos 2x).$$

Substituamos estas expressões na equação proposta e igualemos os coeficientes de $\cos 2x$ e $\text{sen } 2x$; obtém-se um sistema de equações para a determinação de A e B:

$$4B = 1 \text{ ; } \quad -4A = 0, \text{ donde } A = 0, \ B = \frac{1}{4}.$$

O integral geral da equação dada é, pois,

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \text{ sen } 2x + \frac{1}{4} x \text{ sen } 2x. \qquad \text{sen}$$

Exemplo — 6. Resolver a equação

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x.$$

Resolução — O segundo membro da equação é da forma

$$f(x) = e^{2x}(M \cos x + N \operatorname{sen} x)$$

com $M = 3$, $N = 0$. A equação característica $k^2 - 1 = 0$ tem como raízes $k_1 = 1$, e $k_2 = -1$. A solução geral da equação homogénea é

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Como $\alpha + i\beta = 2 + i \cdot 1$, não é raíz da equação característica, procurar-se-á uma solução particular sob a forma

$$y^* = e^{2x}(A \cos x + B \operatorname{sen} x).$$

Substituindo esta expressão na equação, obtém-se, após redução dos termos semelhantes,

$$(2A + 4B) e^{2x} \cos x + (-4A + 2B) e^{2x} \operatorname{sen} x = 3e^{2x} \cos x.$$

Igualando os coeficientes de $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, vem

$$2A + 4B = 3, \quad -4A + 2B = 0,$$

donde $A = \frac{3}{10}$, $B = \frac{3}{5}$. A solução particular é, pois,

$$y^* = e^{2x}\left(\frac{3}{10} \cos x + \frac{3}{5} \operatorname{sen} x\right),$$

e a solução geral

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{2x}\left(\frac{3}{10} \cos x + \frac{3}{5} \operatorname{sen} x\right).$$

§ 25. Equações lineares não homogéneas de ordem n

Seja a equação

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \tag{1}$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $f(x)$ são funções contínuas de x (ou constantes).

Suponhamos que se conhece a solução geral

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \tag{2}$$

da equação sem segundo membro

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0. \tag{3}$$

Tal como para a equação de segunda ordem, tem-se o teorema seguinte.

Teorema — *Se* $\bar{y}$ *é a solução geral da equação homogénea* (3) *e* y^* *uma solução particular da equação não homogénea* (1),

$$Y = \bar{y} + y^*$$

é a solução geral da equação completa.

Por conseguinte, tal como para a equação de segunda ordem, a integração da equação (1) resume-se na procura duma solução particular da equação com segundo membro.

Tal como para a equação de segunda ordem, pode-se achar uma solução particular da equação (1) pelo método da variação das constantes supondo que em (2) $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sejam funções de x.

Formemos o sistema de equações (comparar § 23):

$$\left.\begin{array}{l} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \end{array}\right\} \quad (4)$$

Este sistema de equações de incógnitas $C_1', C_2', \ldots, C_n'$, tem uma solução bem determinada. (O determinante dos coeficientes $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ é o determinante de Wronski das soluções particulares $y_1, y_2, \ldots, y_n$ da equação homogénea, que se supõem linearmente independentes; não é, pois, nulo.)

O sistema (4) pode, pois, ser resolvido em relação às funções $C_1', C_2', \ldots, C_n'$. Integremo-las, uma vez encontradas:

$$C_1 = \int C_1'\,dx + \bar{C}_1;\ C_2 = \int C_2'\,dx + \bar{C}_2;\ \ldots;$$

$$C_n = \int C_n'\,dx + \bar{C}_n,$$

onde $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_n$ são constantes de integração.

Mostremos que a expressão

$$y^* = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n \quad (5)$$

é a solução geral da equação completa (1).

Derivemos a expressão (5) n vezes tendo em conta, de cada vez, as igualdades (4); ter-se-á, então:

$$\begin{array}{l} y^* = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + \ldots + C_ny_n, \\ y^{*\prime} = C_1y_1' + C_2y_2' + C_3y_3' + \ldots + C_ny_n', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{*(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}, \\ y^{*(n)} = C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + \ldots + C_ny_n^{(n)} + f(x). \end{array}$$

Multipliquemos a primeira equação por a_n, a segunda por $a_{n-1}, \ldots,$ a penúltima por a_1 e juntemos. Obtém-se

$$y^{*(n)} + a_1y^{*(n-1)} + \ldots + a_ny^* = f(x).$$

dado que y_1, y_2, . . ., y_n são soluções particulares da equação homogénea e que, por conseguinte, as somas obtidas, juntando entre si os termos duma mesma coluna, são nulas.

Por conseguinte, a função $y^* = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$ onde $C_1, \ldots, C_n$ são funções de x determinadas pelas equações (4)) é uma solução da equação não homogénea (1), e como contém n constantes arbitrárias $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_n$, é a solução geral.

A proposição está assim demonstrada.

Por vezes, é mais fácil encontrar soluções particulares duma equação não homogénea de ordem n de coeficientes constantes (confrontar § 24). Assim é quando:

I — Suponhamos que o segundo membro da equação diferencial é da forma $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, sendo $P(x)$ um polinómio em x; convém distinguir dois casos:

a) se α não é raíz da equação característica, procurar-se-á uma solução particular sob a forma

$$y^* = Q(x)e^{\alpha x},$$

em que $Q(x)$ é um polinómio do mesmo grau que $P(x)$, mas com coeficientes indeterminados;

b) se α é raíz de ordem de multiplicidade μ da equação característica, procurar-se-á uma solução particular da equação com segundo membro sob a forma

$$y^* = x^{\mu}Q(x)e^{\alpha x},$$

sendo $Q(x)$ um polinómio do mesmo grau que $P(x)$.

II — Suponhamos o segundo membro da forma

$$f(x) = M \cos \beta x + N \operatorname{sen} \beta x,$$

onde M e N são constantes. Determina-se, então, a solução particular como se segue:

a) se βi não é raíz da equação característica, a solução particular é da forma

$$y^* = A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x,$$

em que A e B são coeficientes constantes indeterminados;

b) se βi é raíz de multiplicidade μ da equação característica, tem-se

$$y^* = x^{\mu}(A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x).$$

III — Seja

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,$$

em que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios em x. Tem-se:

a) Se $\alpha + \beta i$ não é raíz de ordem de multiplicidade μ da equação característica, procura-se uma solução particular sob a forma

$$y^* = U(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x) e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,$$

em que $U(x)$ e $V(x)$ são polinómios cujo grau é igual ao grau mais elevado de $P(x)$ e de $Q(x)$.

b) Se $\alpha + \beta i$ é raíz de ordem de multiplicidade μ da equação característica, procura-se uma solução particular sob a forma

$$y^* = x^{\mu} [U(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x) e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x],$$

em que $U(x)$ e $V(x)$ têm o mesmo significado que para o caso *a*).

Nota geral para os casos II e III — Se o segundo membro da equação contiver sòmente $\cos \beta x$ ou $\operatorname{sen} \beta x$, será preciso quando muito, procurar uma solução sob a forma indicada, isto é, com um seno ou um cosseno. Noutros termos, pelo facto do segundo membro não conter $\cos \beta x$ ou $\operatorname{sen} \beta x$ não resulta, de forma alguma, que a solução particular não contenha estas funções. Pode-se comprovar isso mesmo, considerando os exemplos 4, 5 e 6 do parágrafo anterior e ver-se-á no exemplo 2 deste parágrafo.

Exemplo — 1. Determinar a solução geral da equação

$$y^{IV} - y = x^3 + 1.$$

Resolução — A equação característica $k^4 - 1 = 0$ tem como raízes

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = i, \quad k_4 = -i.$$

Achemos a solução geral da equação homogénea (ver exemplo 4, § 22):

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x.$$

Tomar-se-á uma solução particular da equação completa sob a forma

$$y^* = A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3.$$

Derivemos y^* quatro vezes e substituamos as expressões obtidas na equação dada. Obtém-se:

$$-A_0 x^3 - A_1 x^2 - A_2 x - A_3 = x^3 + 1.$$

Igualemos os coeficientes das mesmas potências de x. Tem-se:

$$-A_0 = 1; \quad -A_1 = 0; \quad -A_2 = 0; \quad -A_3 = 1.$$

Por conseguinte,

$$y^* = -x^3 - 1.$$

Encontra-se o integral geral da equação completa sob a forma $y = \bar{y} + y^*$, ou seja

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x - x^3 - 1.$$

Exemplo — 2. Resolver a equação

$$y^{IV} - y = 5 \cos x.$$

Resolução — A equação característica $k^4-1=0$ tem por raízes $k_1=1$, $k_2=-1$, $k_3=i$, $k_4=-i$. A solução geral da equação homogénea é, pois,

$$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\operatorname{sen} x.$$

O segundo membro da equação proposta é da forma

$$f(x)=M\cos x+N\operatorname{sen} x,$$

com $M=5$, $N=0$.

Como i é uma raíz simples da equação característica, procura-se uma solução particular sob a forma

$$y^*=x(A\cos x+B\operatorname{sen} x).$$

Substituindo esta expressão na equação, obtém-se:

$$4A\operatorname{sen} x-4B\cos x=5\cos x,$$

donde

$$4A=0,\quad -4B=5$$

A solução particular da equação diferencial proposta é, pois, $A=0$, $B=-\frac{5}{4}$.

$$y^*=-\frac{5}{4}x\operatorname{sen} x$$

e a solução geral

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\operatorname{sen} x-\frac{5}{4}x\operatorname{sen} x.$$

§ 26. Equação diferencial das oscilações mecânicas

O objecto deste parágrafo e dos parágrafos seguintes é o estudo dum problema de mecânica por meio de equações diferenciais lineares.

Consideremos uma massa Q colocada sobre uma mola em espiral (fig. 268). Seja y o desvio desta massa a partir da sua posição de equilíbrio. O desvio para baixo será considerado como positivo, o desvio para cima será negativo. Na posição de equilíbrio a força de gravidade que age sobre a massa é compensada pela elasticidade da mola. Suponhamos que a força de chamada é proporcional ao desvio, isto é, que se exprime por $-ky$ em que k é uma dada constantes chamada «Rigidez» da mola (*).

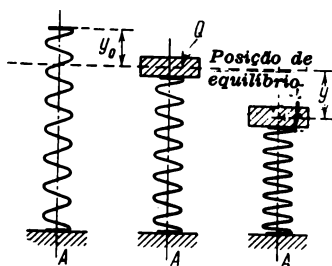



Fig. 268

Suponhamos que se opõe ao movimento da massa Q uma força de resistência proporcional à velocidade do movimento em relação ao

(*) Uma mola cuja força de chamada é proporcional à deformação diz-se «característica linear».

ponto mais baixo da mola isto é, uma força $-\lambda v = -\lambda \frac{dy}{dt}$, em que $\lambda = \text{const.} > 0$ (um amortecedor).

Escrevamos a equação diferencial do movimento. Em virtude da segunda lei de Newton

$$Q \frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda \frac{dy}{dt} \tag{1}$$

(k e λ são números positivos). Obtivemos uma expressão diferencial linear homógenea de segunda ordem de coeficientes constantes.

Escrevamo-la sob a forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = 0, \tag{1'}$$

com

$$p = \frac{\lambda}{Q}; \qquad q = \frac{k}{Q}.$$

Além disso, suponhamos que o ponto inferior da mola efectua um movimento vertical que obedece à lei $z = \varphi(t)$. Tal é o caso se a mola estiver fixada pela sua extremidade inferior a um rolo, descrevendo um contorno dado (fig. 269).

Posição de equilíbrio

y

$z=\varphi(t)$

t

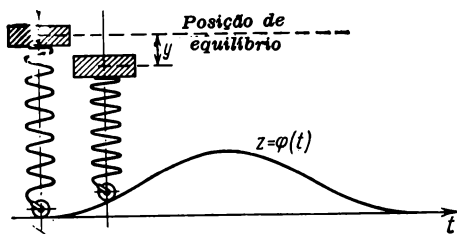



Fig. 269

A força de chamada será então, não $-ky$ mas $-k[y + \varphi(t)]$, a força de resistência será $-\lambda[y' + \varphi'(t)]$ e, obtém-se, em vez da equação (1)

$$Q \frac{d^2y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + ky = -k\varphi(t) - \lambda\varphi'(t) \tag{2}$$

ou

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = f(t), \tag{2'}$$

onde se faz

$$f(t) = -\frac{k\varphi(t) + \lambda\varphi'(t)}{Q}.$$

Obtivemos uma equação diferencial de segunda ordem com segundo membro.

A equação (1′) chama-se *equação das oscilações livres*, a equação (2′) é a *das oscilações forçadas*.

§ 27. Oscilações livres

Consideremos, em primeiro lugar, a equação das oscilações livres

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Escrevamos a correspondente equação característica

$$k^2 + pk + q = 0$$

e achemos as raízes:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

1. Seja $\frac{p^2}{4} > q$. As raízes k_1 e k_2 são, então, números reais negativos. A solução geral exprime-se por exponenciais:

$$y = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} \qquad (k_1 < 0,\ k_2 < 0). \tag{1}$$

Resulta desta fórmula que a distensão y tende assintòticamente para zero quando $t \to \infty$, quaisquer que sejam as condições iniciais. Não há oscilação no caso dado, porque a força de travagem é grande em relação ao coeficiente de rigidez da mola k.

2. Seja $\frac{p^2}{4} = q$; tem-se, então, uma raíz dupla $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$. A solução geral escreve-se, pois:

$$y = C_1 e^{-\frac{p}{2}t} + C_2 t e^{-\frac{p}{2}t} = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\frac{pt}{2}}. \tag{2}$$

Aí ainda a distensão tende para zero quando $t \to \infty$, mas menos depressa do que no caso anterior (dado o factor $C_1 + C_2 t$).

3. Seja $p = 0$, isto é, que se supõe a ausência de travagem. A equação característica escreve-se

$$k^2 + q = 0,$$

e tem por raízes $k_1 = \beta i$, $k_2 = -\beta i$, com $\beta = \sqrt{q}$. A solução geral é

$$y = C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t. \tag{3}$$

Substituamos nesta fórmula as constantes arbitrárias C_1 e C_2 por outras, A e φ_0 ligadas a C_1 e C_2 pelas relações:

$$C_1 = A \operatorname{sen} \varphi_0, \qquad C_2 = A \cos \varphi_0.$$

Daí resulta A e φ_0 em função de C_1 e C_2, como se segue:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \qquad \varphi_0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{C_1}{C_2}.$$

Substituindo as expressões de C_1 e C_2 na fórmula (3), obtém-se

$$y = A \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \beta t + A \cos \varphi_0 \operatorname{sen} \beta t$$

ou

$$y = A \operatorname{sen} (\beta t + \varphi_0). \tag{3'}$$

Tais oscilações dizem-se *harmónicas*. As curvas integrais são sinusoides. O intervalo de tempo T no qual a quantidade $\beta t + \varphi_0$ varia

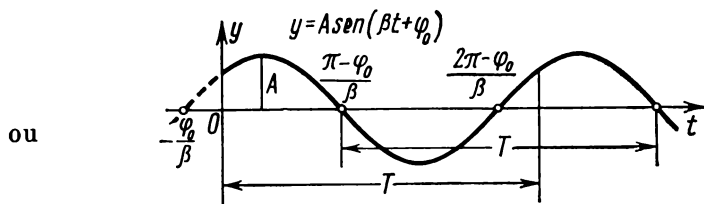



Fig. 270

de 2π chama-se *período das oscilações*; no nosso caso $T = \dfrac{2\pi}{\beta}$. Chamamos *frequência das oscilações* ao número de oscilações no tempo 2π; no nosso caso a frequência é β; a constante A, que representa a distensão máxima a partir da posição de equilíbrio, chama-se *amplitude* do movimento oscilatório; φ_0 é a *fase inicial*.

Representa-se o gráfico da função (3') na fig. 270.

4. Seja $p \neq 0$ e $\dfrac{p^2}{4} < q$.

As raízes da equação característica são, então, complexas:

$$k_1 = \alpha + i\beta, \qquad k_2 = \alpha - i\beta,$$

em que

$$\alpha = -\frac{p}{2} < 0, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

O integral geral é da forma

$$y = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t)$$

$$y = A e^{\alpha t} \operatorname{sen} (\beta t + \varphi_0). \tag{4}$$

Somos obrigados a tomar aqui, para amplitude, a quantidade que depende do tempo. Como $\alpha < 0$, ela tende para zero quando $t \to \infty$,

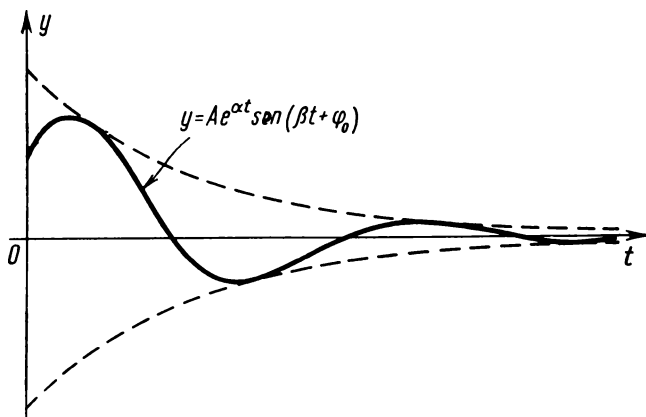



Fig. 271.

isto é, que estamos na presença de *oscilações amortecidas*. A figura 271, representa o gráfico de tais oscilações.

§ 28. Oscilações forçadas

A equação das oscilações forçadas escreve-se

$$y'' + py' + qy = f(t).$$

Consideremos o caso importante da prática em que a força perturbadora exterior é representada pela função periódica

$$f(t) = a \operatorname{sen} \omega t;$$

a equação torna-se, então,

$$y'' + py' + qy = a \operatorname{sen} \omega t. \tag{1}$$

1. Suponhamos, em primeiro lugar, que $p \neq 0$ e $\frac{p^4}{4} < q$, isto é, que as raízes da equação característica são números complexos $\alpha \pm \beta i$. A solução geral da equação homogénea escreve-se, então, (ver fórmulas (4) e (4'), § 27)

$$\bar{y} = Ae^{\alpha t} \operatorname{sen} (\beta t + \varphi_0). \tag{2}$$

Procuremos uma solução particular da equação com segundo membro sob a forma

$$y^* = M \cos \omega t + N \operatorname{sen} \omega t. \tag{3}$$

Substituindo esta expressão de y^* na equação diferencial inicial, encontra-se M e N:

$$M = \frac{-p\omega a}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}; \qquad N = \frac{(q-\omega^2)\,a}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}.$$

Antes de substituir as expressões de M e N na igualdade (3), introduzamos as novas constantes A^* e φ^*, fazendo

$$M = A^* \operatorname{sen} \varphi^*, \qquad N = A^* \cos \varphi^*,$$

ou seja

$$A^* = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}}, \qquad \operatorname{tg} \varphi^* = \frac{M}{N}.$$

Poder-se-á, então, escrever a solução particular da equação não homogénea sob a forma

$$y^* = A^* \operatorname{sen} \varphi^* \cos \omega t + A^* \cos \varphi^* \operatorname{sen} \omega t = A^* \operatorname{sen} (\omega t + \varphi^*)$$

ou, finalmente,

$$y^* = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}} \operatorname{sen} (\omega t + \varphi^*).$$

O integral geral da equação (1) é igual a $y = \bar{y} + y^*$, ou seja

$$y = Ae^{\alpha t} \operatorname{sen} (\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}} \operatorname{sen} (\omega t + \varphi^*).$$

O primeiro termo do segundo membro (a solução da equacão homogénea) representa oscilações amortecidas. Decresce quando t cresce e, por conseguinte, ao fim dum certo tempo, é o segundo termo, que representa oscilações forçadas, que desempenha o papel principal. A frequência ω destas oscilações é igual à frequência da força exte-

rior $f(t)$; a amplitude das oscilações forçadas é tanto maior quanto mais pequeno for p e que ω^2 esteja na vizinhança de q.

Estudemos, em detalhe, a dependência entre a amplitude das oscilações forçadas e a frequência ω para diferentes valores de p. Designemos para este efeito a amplitude das oscilações forçadas por $D(\omega)$:

$$D(\omega)=\frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2}}.$$

Façamos $q=\beta_1^2$ (para $p=0$ β_1 seria igual à frequência das oscilações próprias). Tem-se

$$D(\omega)=\frac{a}{\sqrt{(\beta_1^2-\omega^2)^2+p^2\omega^2}}=\frac{a}{\beta_1^2\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\beta_1^2}\right)^2+\frac{p^2}{\beta_1^2}\frac{\omega^2}{\beta_1^2}}}.$$

Façamos

$$\frac{\omega}{\beta_1}=\lambda;\quad \frac{p}{\beta_1}=\gamma,$$

em que λ é o quociente da frequência da força perturbadora e da frequência das oscilações livres do sistema, não dependendo a constante λ da força perturbadora. A amplitude exprime-se, então, pela fórmula

$$\bar{D}(\lambda)=\frac{a}{\beta_1^2\sqrt{(1-\lambda^2)^2+\gamma^2\lambda^2}}. \tag{4}$$

Achemos o máximo desta função. Corresponde, evidentemente, ao valor de λ para o qual o denominador é mínimo. Mas o mínimo da função

$$\sqrt{(1-\lambda^2)^2+\gamma^2\lambda^2} \tag{5}$$

é atingido para

$$\lambda=\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{2}}$$

e é igual a

$$\gamma\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{4}}.$$

Por conseguinte, a amplitude máxima é igual a

$$\bar{D}_{\max}=\frac{a}{\beta_1^2\gamma\sqrt{-\frac{\gamma^2}{4}}}$$

O gráfico da função $\overline{D}(\lambda)$ para diversos γ está representada na figura 272 (para fixar ideias, fez-se a construção das curvas correspondentes $a = 1$, $\beta_1 = 1$). Estas curvas chamam-se *curvas de ressonância.*

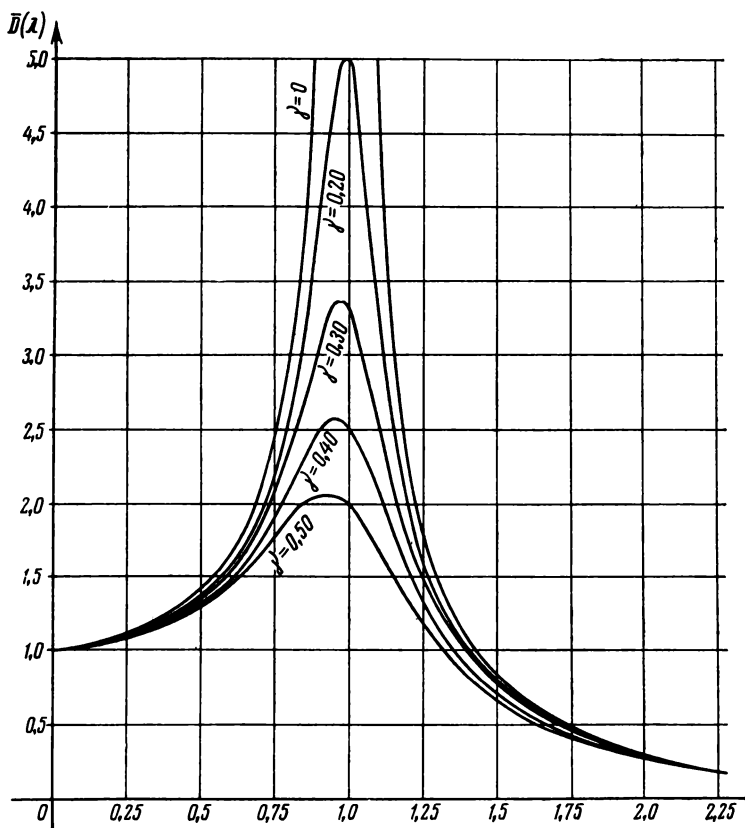



Fig. 272

Resulta da fórmula (5) que para γ pequenos o valor máximo da amplitude é atingido para valores de λ vizinhos da unidade, isto é, quando a frequência da força coercitiva é vizinha da frequência das oscilações livres. Se $\gamma = 0$ (logo $p = 0$, isto é, se não houver resis-

tência ao movimento, a amplitude das oscilações forçadas cresce indefinidamente quando $\lambda \to 1$, isto é, quando $\omega \to \beta_1 = \sqrt{q}$:

$$\lim_{\substack{\lambda \to 1 \\ (\gamma=0)}} \overline{D}(\lambda) = \infty.$$

Quando $\omega^2 = q$, há ressonância.

2. Suponhamos, agora, que se tem $p = 0$, isto é, que consideraremos a equação das oscilações elásticas sem resistência em presença duma força coercitiva periódica:

$$y'' + qy = a \operatorname{sen} \omega t. \tag{6}$$

A solução geral da equação homogénea é

$$\bar{y} = C_1 \cos \beta t + C_2 \operatorname{sen} \beta t \qquad (\beta^2 = q).$$

Se $\beta \neq \omega$, isto é, se a frequência da força coercitiva não é igual à frequência das oscilações próprias, a solução particular da equação não homogénea escreve-se

$$y^* = M \cos \omega t + N \operatorname{sen} \omega t.$$

Substituindo esta expressão na equação proposta, vem

$$M = 0, \qquad N = \frac{a}{q - \omega^2}.$$

A solução geral é

$$y = A \operatorname{sen} (\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{q - \omega^2} \operatorname{sen} \omega t.$$

O movimento resulta, pois, da sobreposição das oscilações próprias de frequência β e das oscilações forçadas de frequência ω.

Se $\beta = \omega$, isto é, se a frequência das oscilações próprias coincide com a frequência da força coercitiva, a função (3) não é solução da equação (6). Procurar-se-á, então, em virtude dos resultados do § 24, uma solução particular sob a forma

$$y^* = t(M \cos \omega t + N \operatorname{sen} \omega t). \tag{7}$$

Encontra-se M e N substituindo esta expressão na equação diferencial:

$$M = -\frac{a}{2\omega}; \qquad N = 0.$$

Por conseguinte,

$$y^* = -\frac{a}{2\beta} t \cos \omega t$$

A solução geral é da forma

$$y = A \operatorname{sen}(\beta t + \varphi_0) - \frac{a}{2\omega} t \cos \beta t.$$

O segundo termo do segundo membro mostra que a amplitude das oscilações aumenta indefinidamente quando $t \to \infty$. Este fenómeno,

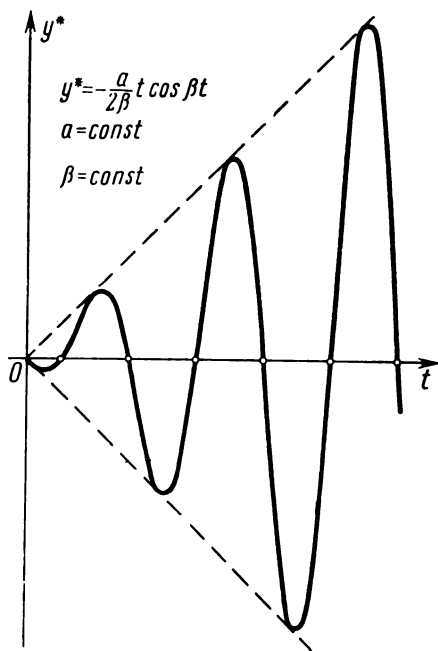



Fig. 273.

que tem lugar quando a frequência das oscilações próprias do sistema e a frequência da força coercitiva coincidem, chama-se *ressonância*.

O gráfico da função y^* está representada na figura 273.

§ 29. Sistemas de equações diferenciais

Na resolução dum grande número de problemas pede-se para encontrar funções $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$ que satisfaçam a um sistema de equações diferenciais que contém a variável x, as funções desconhecidas y_1, y_2, ..., y_n e suas derivadas.

Consideremos o sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx}=f_2(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx}=f_n(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \end{array}\right\} \quad (1)$$

onde, $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ são funções desconhecidas e x a variável.

Um tal sistema, resolvido em relação às derivadas primeiras, chama-se *sistema normal.*

Integrar este sistema, é determinar funções $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ que verifiquem as equações (1) e que satisfaçam às condições iniciais dadas:

$$(y_1)_{x=x_0}=y_{10},\ (y_2)_{x=x_0}=y_{20},\ \ldots,\ (y_n)_{x=x_0}=y_{n0}. \quad (2)$$

Integra-se o sistema (1) como se segue.

Derivemos a primeira das equações (1) em relação a x:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx}+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

Substituamos as derivadas $\dfrac{dy_1}{dx},\ \dfrac{dy_2}{dx},\ \ldots,\ \dfrac{dy_n}{dx}$ pelas suas expressões $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n$ tiradas de (1).

Obtém-se a equação

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n).$$

Derivando a equação obtida e procedendo da mesma maneira, acha-se:

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}=F_3(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n).$$

Assim, continuando, encontra-se finalmente

$$\frac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n).$$

Obtém-se, assim, o sistema seguinte:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx_1} &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} &= F_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^ny_1}{dx^n} &= F_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Obtém-se das $n - 1$ primeiras equações (admitindo que isso seja possível) $y_2, y_3, \ldots, y_n$ exprimindo-as em função de x, y_1 e das derivadas $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$:

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= \varphi_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 &= \varphi_3(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Substituindo estas expressões na última equação (3), obtém-se uma equação de ordem n baseando-se em y_1:

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}). \qquad (5)$$

Determina-se y_1 resolvendo esta expressão:

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \qquad (6)$$

Derivemos esta expressão $n - 1$ vezes; encontram-se as derivadas $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ como funções de $x, C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Substituamos estas funções na equação (4). Encontram-se y_2, $y_3, \ldots, y_n$:

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= \psi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \psi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Para que a solução obtida satisfaça às condições iniciais dadas (2), não resta mais do que determinar em (6) e (7) os valores das cons-

constantes C_1, C_2, ..., C_n (como se fez no caso duma só equação diferencial).

Nota — 1. Se o sistema (1) for linear em relação às funções desconhecidas, a equação (5) será também linear.

Exemplo — 1. Integrar o sistema

$$\frac{dy}{dx}=y+z+x, \quad \frac{dz}{dx}=-4y-3z+2x \tag{a}$$

com as condições iniciais

$$(y)_{x=0}=1, \quad (z)_{x=0}=0. \tag{b}$$

Resoluções:

1. Derivando em relação a x a primeira equação, tem-se

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}+1.$$

Substituindo, nesta última, as expressões $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ obtidas das equações (a), obtém-se:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(y+z+x)+(-4y-3z+2x)+1$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-3y-2z+3x+1. \tag{c}$$

2. Deduz-se da primeira equação (a)

$$z=\frac{dy}{dx}-y-x. \tag{d}$$

Substituindo esta expressão em (c), obtém-se

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-3y-2\left(\frac{dy}{dx}-y-x\right)+3x+1$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=5x+1. \tag{e}$$

A solução geral desta última é

$$y=(C_1+C_2x)\,e^{-x}+5x-9 \tag{f}$$

e tendo em conta (d)

$$z=(C_2-2C_1-2C_2x)\,e^{-x}-6x+14. \tag{g}$$

Escolhamos as constantes C_1 e C_2 de maneira a satisfazer às condições iniciais (b):

$$(y)_{x=0}=1, \quad (z)_{x=0}=0.$$

Deduz-se, então, das igualdades (f) e (g)

$$1=C_1-9, \quad 0=C_2-2C_1+14,$$

donde $C_1=10$ e $C_2=6$.

Por conseguinte, a solução que satisfaz às condições iniciais (b) escreve-se

$$y=(10+6x)\,e^{-x}+5x-9, \quad z=(-14-12x)\,e^{-x}-6x+14.$$

Nota — 2. Suposemos, nos raciocínios anteriores, que se podia tirar as funções $y_2, y_3, \ldots, y_n$ das $n-1$ primeiras equações (3). Mas pode-se, por vezes, tirar $y_2, \ldots, y_n$ de menos de n equações. Obtém-se, então, para determinar y, uma equação diferencial de ordem inferior a n.

Exemplo — 2. Integrar o sistema

$$\frac{dx}{dt}=y+z\,; \quad \frac{dy}{dt}=x+z\,; \quad \frac{dz}{dt}=x+y.$$

Resolução — Derivando em relação a t a primeira equação, encontra-se

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}=(x+z)+(x+y),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2x+y+z.$$

Eliminando as variáveis y e z das equações

$$\frac{dx}{dt}=y+z\,; \quad \frac{d^2x}{dt^2}=2x+y+z,$$

obtém-se uma equação de segunda ordem em relação a x:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-2x=0$$

O integral geral desta última é

$$x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}. \qquad (\alpha)$$

Donde

$$\frac{dx}{dt}=-C_1e^{-t}+2C_2e^{2t} \text{ et } y=\frac{dx}{dt}-z=-C_1e^{-t}+2C_2e^{2t}-z. \qquad (\beta)$$

Substituindo as expressões acima de x e y na terceira equação do sistema proposto, obtém-se uma equação que permite determinar z:

$$\frac{dz}{dt}+z=3C_2e^{2t}.$$

Integrando esta equação, encontra-se

$$z=C_3e^{-t}+C_2e^{2t}. \qquad (\gamma)$$

Mas tem-se, então, em virtude de (β):

$$y=-(C_1+C_3)\,e^{-t}+C_2e^{2t}. \qquad (\delta)$$

As equações (α), (δ), (γ) dão a solução geral da sistema proposto.

Pode suceder que as equações diferenciais dum sistema contenham derivadas de ordens superiores a um. Por conseguinte, a ordem do sistema eleva-se.

Assim, o problema do movimento dum ponto material solicitado por uma força F reduz-se a um sistema de três equações diferenciais de segunda ordem. Sejam F_x, F_y, F_z as projecções da força F sobre os eixos coordenados.

A posição do ponto em cada instante t é definida pelas suas coordenadas x, y, z. Resulta daí que x, y, z são funções de t. As projecções do vector velocidade do ponto material sobre os três eixos são $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

Suponhamos que a força F e, por conseguinte, as suas projecções F_x, F_y, F_z, dependem do tempo t, da posição x, y, z e da velocidade $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

As funções que se procuram neste problema são

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Determinamo-las a partir das equações da distância (lei de Newton):

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right), \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right), \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Obtivemos um sistema de três equações diferenciais de segunda ordem. Se o movimento é plano, isto é, se a trajectória é uma curva plana (por exemplo, do plano Oxy) obtém-se um sistema de duas equações para determinar $x(t)$ e $y(t)$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x\left(t,\ x,\ y,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right), \tag{9}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y\left(t,\ x,\ y,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right). \tag{10}$$

Pode-se resolver um sistema de equações diferenciais de ordem n reduzindo-o a um sistema de equações de primeira ordem. Mostremos como se procede com o exemplo (9) e (10). Introduzamos as notações:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v.$$

Tem-se

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

O sistema de duas equações de segunda ordem (9) e (10) a duas funções desconhecidas $x(t)$ e $y(t)$ é substituído por um sistema de quatro equações de primeira ordem com quatro funções desconhecidas x, y, u, v:

$$\frac{dx}{dt} = u,$$

$$\frac{dy}{dt} = v,$$

$$m\frac{du}{dt} = F_x(t,\ x,\ y,\ u,\ v),$$

$$m\frac{dv}{dt} = F_y(t,\ x,\ y,\ u,\ v).$$

Indiquemos, para terminar, que o método geral examinado de resolução de sistemas de equações diferenciais pode ser substituído, em certos casos concretos, por processos artificiais que permite chegar mais ràpidamente ao fim.

Exemplo — 3. Determinar a solução geral do sistema de equações diferenciais

$$\frac{d^2y}{dx^2}=z,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=y.$$

Resolução — Derivemos duas vezes em relação a x os dois membros da primeira equação:

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Ora, $\frac{d^2z}{dx^2}=y$, logo se obtém a equação de quarta ordem

$$\frac{d^4y}{dx^4}=y.$$

Por integração, obtém-se a solução geral desta equação (ver t. II, cap. XIII, § 22, exemplo 4):

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\operatorname{sen} x.$$

Tiremos $\frac{d^2y}{dx^2}$ desta equação e substituámo-lo na primeira equação do sistema proposto. Determina-se

$$z=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\operatorname{sen} x.$$

§ 30. Sistemas de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes

Seja dado o sistema de equações diferenciais

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n,\\ \frac{dx_2}{dt}&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dx_n}{dt}&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

em que os coeficientes a_{ij} são constantes. Aqui t designa a variável independente, $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ as funções desconhecidas. O sistema (1) chama-se *sistema de equações diferenciais homogéneas de coeficientes constantes.*

Como indicamos no parágrafo anterior, este sistema pode ser resolvido reduzindo-o a uma equação do grau n, ordem que no caso presente será linear (já o haviamos notado na nota 1 do parágrafo precedente). Ora o sistema (1) pode igualmente ser resolvido por um outro método, sem o reduzir a uma equação de ordem n. Este método permite analisar mais concretamente o carácter das soluções.

Procuraremos a solução particular do sistema sob a forma seguinte:

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt}, \quad x_2 = \alpha_2 e^{kt}, \quad \ldots, \quad x_n = \alpha_n e^{kt}. \tag{2}$$

Deve-se determinar as constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ e k de modo que as funções $\alpha_1 e^{kt}, \alpha_2 e^{kt}, \ldots, \alpha_n e^{kt}$ verifiquem o sistema de equações (1). Substituindo-as no sistema (1), obtemos:

$$\left.\begin{aligned}
k\alpha_1 e^{kt} &= (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n)\, e^{kt},\\
k\alpha_2 e^{kt} &= (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n)\, e^{kt},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
k\alpha_n e^{kt} &= (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n)\, e^{kt}.
\end{aligned}\right\}$$

Dividamos por e^{kt}. Passando para o primeiro membro todos os termos e pondo em evidência os coeficientes de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, obtemos o sistema de equações

$$\left.\begin{aligned}
(a_{11} - k)\,\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n &= 0,\\
a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\,\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - k)\,\alpha_n &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Escolhamos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ e k de maneira que seja verificado o sistema (3). Este sistema é um sistema linear de equações algébricas em relação a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Formemos o determinante do sistema (3):

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix}
a_{11} - k & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} - k & \ldots & a_{2n}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & (a_{nn} - k)
\end{vmatrix}. \tag{4}$$

Se k é tal que o determinante Δ é diferente de zero, o sistema (3) não possui senão uma solução nula $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, e, por conseguinte, as fórmulas (2) apenas dão as soluções triviais:

Assim, apenas poderemos obter soluções não triviais (2) para os valores de k para os quais o determinante (4) se anula.

Obtemos uma equação do grau n para determinar k:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Esta equação é chamada *equação característica* do sistema (1). As suas raízes chamam-se *raízes da equação característica.*

Consideremos alguns casos.

I — *As raízes de equação característica são reais e distintas.*

Designemos por $k_1, k_2, \dots, k_n$, as raízes da equação característica. Para cada raíz k_i escrevamos o sistema (3) e determinemos os coeficientes

$$\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}.$$

Pode-se mostrar que um dentre eles é arbitrário. Pode-se estimá-lo igual à unidade. Assim, obtemos:

para a raiz k_1 a solução do sistema (1)

$$x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t}, \; x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t}, \; \dots, \; x_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t};$$

para a raiz k_2 a solução do sistema (1)

$$x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t}, \; x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t}, \; \dots, \; x_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t};$$

. . . .

para a raiz k_n a solução do sistema (1)

$$x_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, \; x_2^{(n)} = \alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \; \dots, \; x_n^{(n)} = \alpha_n^{(n)} e^{k_n t}.$$

Pode-se verificar, por substituição directa nas equações, que o sistema de funções

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = C_1\alpha_1^{(1)} e^{k_1 t} + C_2\alpha_1^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + C_n\alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, \\ x_2 = C_1\alpha_2^{(1)} e^{k_1 t} + C_2\alpha_2^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + C_n\alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = C_1\alpha_n^{(1)} e^{k_1 t} + C_2\alpha_n^{(2)} e^{k_2 t} + \dots + C_n\alpha_n^{(n)} e^{k_n t}, \end{array}\right\} \qquad (6)$$

em que $C_1, C_2, \dots, C_n$ são constantes arbitrárias, é a solução do sistema de equações diferenciais (1). É a *solução geral* do sistema (1). Mostra-se fàcilmente que se pode encontrar para as constantes valores tais que a solução verifica as condições iniciais dadas.

Exemplo — 1. Achar a solução geral do sistema de equações

$$\frac{dx_1}{dt}=2x_1+2x_2, \quad \frac{dx_2}{dt}=x_1+3x_2.$$

Resolução — Formemos a equação característica

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix}=0$$

em que $k^2-5k+4=0$. Encontramos as raízes

$$k_1=1, \qquad k_2=4.$$

Voltemos a procurar as soluções sob a forma

$$x_1^{(1)}=\alpha_1^{(1)}e^t, \qquad x_2^{(1)}=\alpha_2^{(1)}e^t$$

e

$$x_1^{(2)}=\alpha_1^{(2)}e^{4t}, \qquad x_2^{(2)}=\alpha_2^{(2)}e^{4t}.$$

Componhamos o sistema (3) para a raíz $k_1=1$ e determinemos $\alpha_1^{(1)}$ e $\alpha_2^{(1)}$:

$$\left.\begin{array}{l}(2-1)\,\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0,\\ 1\alpha_1^{(1)}+(3-1)\,\alpha_2^{(1)}=0\end{array}\right\}$$

ou

$$\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0,$$
$$\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0,$$

donde $\alpha_2^{(1)}=-\frac{1}{2}\alpha_1^{(1)}$. Façamos $\alpha_1^{(1)}=1$. Obtemos $\alpha_2^{(1)}=-\frac{1}{2}$. Obtivemos, assim, a solução do sistema

$$x_1^{(1)}=e^t, \qquad x_2^{(1)}=-\frac{1}{2}e^t.$$

Componhamos, em seguida, o sistema (3) para a raíz $k_2=4$ e determinemos $\alpha_1^{(2)}$ e $\alpha_2^{(2)}$:

$$-2\alpha_1^{(2)}+2\alpha_2^{(2)}=0,$$
$$\alpha_1^{(2)}-2\alpha_2^{(2)}=0,$$

donde $\alpha_1^{(2)}=\alpha_2^{(2)}$ e $\alpha_1^{(2)}=1$, $\alpha_2^{(2)}=1$. Obtemos a segunda solução do sistema:

$$x_1^{(2)}=e^{4t}, \qquad x_2^{(2)}=e^{4t}.$$

A solução geral do sistema será [ver (6)]

$$x_1=C_1e^t+C_2e^{4t},$$

$$x_2=-\frac{1}{2}C_1e^t+C_2e^{4t}.$$

II — *As raízes da equação característica são distintas, mas algumas delas são complexas.*

Suponhamos que entre as raízes da equação característica existem duas raízes complexas conjugadas:

$$k_1=\alpha+i\beta, \qquad k_2=\alpha-i\beta.$$

A estas raízes corresponderão as soluções

$$x_j^{(1)}=\alpha_j^{(1)}e^{(\alpha+i\beta)t} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{7}$$

$$x_j^{(2)}=\alpha_j^{(2)}e^{(\alpha-i\beta)t} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{8}$$

Os coeficientes $\alpha_j^{(1)}$ e $\alpha_j^{(2)}$ são determinados a partir do sistema de equações (3).

Do mesmo modo que no § 21 (t. II, cap. III) pode-se mostrar que as partes reais e imaginárias da solução são também soluções.

Obtemos, assim, duas soluções particulares:

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}_j^{(1)}&=e^{\alpha t}\,(\lambda_j^{(1)}\cos\beta x+\lambda_j^{(2)}\operatorname{sen}\beta x),\\ \bar{x}_j^{(2)}&=e^{\alpha t}\,(\bar{\lambda}_j^{(1)}\operatorname{sen}\beta x+\bar{\lambda}_j^{(2)}\cos\beta x),\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

em que $\lambda_j^{(1)}$, $\lambda_j^{(2)}$, $\bar{\lambda}_j^{(1)}$, $\bar{\lambda}_j^{(2)}$ são números reais definidos por meio de $\alpha_j^{(1)}$ e $\alpha_j^{(2)}$.

As combinações correspondentes das funções (9) entrarão na solução geral do sistema.

Exemplo — 2. Encontrar a solução geral do sistema

$$\frac{dx_1}{dt}=-7x_1+x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt}=-2x_1-5x_2.$$

Resolução — Formemos a equação característica

$$\begin{vmatrix}-7-k & 1\\ -2 & -5-k\end{vmatrix}=0$$

ou $k^2+12k+37=0$ e calculemos as suas raízes:

$$k_1=-6+i, \qquad k_2=-6-i.$$

Fazendo $k_1=-6+i$ no sistema (3), achamos:

$$\alpha_1^{(1)}=1, \qquad \alpha_2^{(1)}=1+i.$$

Escrevamos a solução (7):

$$x_1^{(1)}=1e^{(-6+i)t}, \qquad x_2^{(1)}=(1+i)\,e^{(-6+i)t}. \tag{7}$$

Fazendo $k_2=-6-i$ no sistema (3), achamos:

$$\alpha_1^{(2)}=1, \qquad \alpha_2^{(2)}=1-i.$$

Obtemos o segundo sistema de soluções (8):

$$x_1^{(2)}=e^{(-6-i)t}, \qquad x_2^{(2)}=(1-i)\,e^{(-6-i)t}. \tag{8'}$$

Voltemos a escrever a solução (7'):

$$x_1^{(1)}=e^{-6t}\,(\cos t+i\operatorname{sen} t), \qquad x_2^{(1)}=(1+i)\,e^{-6t}\,(\cos t+i\operatorname{sen} t)$$

ou

$$x_1^{(1)}=e^{-6t}\cos t+ie^{-6t}\operatorname{sen} t,$$

$$x_2^{(1)}=e^{-6t}\,(\cos t-\operatorname{sen} t)+ie^{-6t}\,(\cos t+\operatorname{sen} t).$$

Voltemos a escrever a solução (8′):

$$x_1^{(2)} = e^{-6t}\cos t - ie^{-6x}\operatorname{sen} t,$$
$$x_2^{(2)} = e^{-6t}(\cos t - \operatorname{sen} t) - ie^{-6t}(\cos t + \operatorname{sen} t).$$

Podemos escolher como sistema de soluções parciais separadamente as partes reais e imaginárias

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{x}_1^{(1)} = e^{-6t}\cos t, & \bar{x}_2^{(1)} = e^{-6t}(\cos t - \operatorname{sen} t), \\ \bar{x}_1^{(2)} = e^{-6t}\operatorname{sen} t, & \bar{x}_2^{(2)} = e^{-6t}(\cos t + \operatorname{sen} t). \end{array}\right\} \tag{9′}$$

A solução geral do sistema será:

$$x_1 = C_1 e^{-6t}\cos t + C_2 e^{-6t}\operatorname{sen} t,$$
$$x_2 = C_1 e^{-6t}(\cos t - \operatorname{sen} t) + C_2 e^{-6t}(\cos t + \operatorname{sen} t).$$

Pode-se encontrar, por um método análogo, a solução dum sistema de equações diferenciais lineares de ordens superiores de coeficientes constantes.

Em mecânica e teoria de circuitos eléctricos estuda-se, por exemplo, a solução do sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = a_{21}x + a_{22}y. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Procuremos de novo a solução sob a forma

$$x = \alpha e^{kt}, \qquad y = \beta e^{kt}.$$

Substituindo estas expressões no sistema (10) e dividindo por e^{kt}, obtemos um sistema de equações para determinar α, β e k:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - k^2)\alpha + a_{12}\beta = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k^2)\beta = 0. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Os valores α e β não serão diferentes de zero senão no caso em que o determinante do sistema for igual a zero:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

É precisamente a equação característica para o sistema (10); é uma equação de quarta ordem em relação a k. Sejam k_1, k_2, k_3 e k_4 as suas raízes (supondo-as distintas).

Por cada raíz k_i do sistema (11) encontramos os valores α e β. A solução geral análoga a (6) será da forma

$$x = C_1\alpha^{(1)}e^{k_1 t} + C_2\alpha^{(2)}e^{k_2 t} + C_3\alpha^{(3)}e^{k_3 t} + C_4\alpha^{(4)}e^{k_4 t},$$
$$y = C_1\beta^{(1)}e^{k_1 t} + C_2\beta^{(2)}e^{k_2 t} + C_3\beta^{(3)}e^{k_3 t} + C_4\beta^{(4)}e^{k_4 t}.$$

Se certas raízes forem complexas, a cada par de raízes complexas corresponderá, na solução geral, uma expressão do tipo (9).

Exemplo — Encontrar a solução geral do sistema de equações diferenciais

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x - 4y,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -x + y.$$

Resolução — Escrevamos a equação característica (12) e achemos as suas raízes:

$$\begin{vmatrix} 1-k^2 & -4 \\ -1 & 1-k^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$k_1 = i, \quad k_2 = -i, \quad k_3 = \sqrt{3}, \quad k_4 = -\sqrt{3}.$$

Voltemos a procurar a solução sob a forma

$$x^{(1)} = \alpha^{(1)}e^{it}, \qquad y^{(1)} = \beta^{(1)}e^{it},$$
$$x^{(2)} = \alpha^{(2)}e^{-it}, \qquad y^{(2)} = \beta^{(2)}e^{-it},$$
$$x^{(3)} = \alpha^{(3)}e^{\sqrt{3}t}, \qquad y^{(3)} = \beta^{(3)}e^{\sqrt{3}t},$$
$$x^{(4)} = \alpha^{(4)}e^{-\sqrt{3}t}, \qquad y^{(4)} = \beta^{(4)}e^{-\sqrt{3}t}.$$

Do sistema (11) tiramos $\alpha^{(j)}$ e $\beta^{(j)}$:

$$\alpha^{(1)} = 1, \qquad \beta^{(1)} = \frac{1}{2},$$
$$\alpha^{(2)} = 1, \qquad \beta^{(2)} = \frac{1}{2},$$
$$\alpha^{(3)} = 1, \qquad \beta^{(3)} = -\frac{1}{2},$$
$$\alpha^{(4)} = 1, \qquad \beta^{(4)} = -\frac{1}{2}.$$

Escrevamos as soluções complexas:

$$x^{(1)} = e^{-it} = \cos t + i \operatorname{sen} t, \qquad y^{(1)} = \frac{1}{2}(\cos t + i \operatorname{sen} t),$$
$$x^{(2)} = e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t, \qquad y^{(2)} = \frac{1}{2}(\cos t - i \operatorname{sen} t).$$

As partes reais e imaginárias tomadas separadamente serão também soluções:

$$\bar{x}^{(1)} = \cos t, \qquad \bar{y}^{(1)} = \frac{1}{2}\cos t,$$
$$\bar{x}^{(2)} = \operatorname{sen} t, \qquad \bar{y}^{(2)} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t.$$

Podemos, agora, escrever a solução geral:

$$x = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + C_3 e^{\sqrt{3}t} + C_4 e^{-\sqrt{3}t},$$

$$y = C_1 \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} C_2 \operatorname{sen} t - C_3 \frac{1}{2} e^{\sqrt{3}t} - C_4 \frac{1}{2} e^{-\sqrt{3}t}.$$

Nota — Não consideramos neste parágrafo o caso das raízes múltiplas da equação característica.

§ 31. Noção sobre a teoria da estabilidade de Liapounov

Como as soluções da maior parte das equações diferenciais e dos sistemas de equações elementares não se exprimem por meio de funções elementares ou por quadraturas, recorre-se igualmente a métodos de integração aproximada. Deu-se uma ideia destes métodos no § 3 (t. II, cap. XIII); além disso, vários destes métodos serão examinados nos §§ 32-34 e também no capítulo XVI.

O defeito destes métodos, é que eles apenas dão uma solução particular; para obter outras soluções particulares é preciso refazer todos os cálculos. Conhecendo uma solução particular não se pode pronunciar sob o carácter das outras soluções.

Em muitos problemas de mecânica e de técnica, importa conhecer não os valores concretos da solução correspondente a valores concretos da variável, mas o comportamento da solução quando a variável varia, em especial quando tende para infinito.

É, por exemplo, importante saber se as soluções que satisfazem às condições iniciais dadas são periódicas ou se elas tendem assintòticamente para uma função conhecida, etc. A teoria qualitativa das equações diferenciais tem por objecto estas questões.

A questão da estabilidade duma solução ou dum movimento é uma das questões fundamentais da teoria qualitativa; esta questão foi estudada em detalhe pelo eminente matemático russo A. Liapounov (1857-1918).

Seja o sistema de equações diferenciais

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(t, x, y). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Sejam $x = x(t)$ e $y = y(t)$ as soluções deste sistema que satisfazem às condições iniciais

$$\left.\begin{aligned} x_{t=0} &= x_0, \\ y_{t=0} &= y_0. \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

Sejam ainda $\bar{x} = \bar{x}\,(t)$ e $\bar{y} = \bar{y}\,(t)$ as soluções deste sistema (1) que satisfazem às condições iniciais

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}_{t=0} = \bar{x}_0, \\ \bar{y}_{t=0} = \bar{y}_0. \end{array}\right\} \qquad (1')$$

Definição — As soluções $x = x(t)$ e $y = y(t)$ que satisfazem às equações (1) e às condições iniciais (1′) dizem-se *estáveis* no sentido de

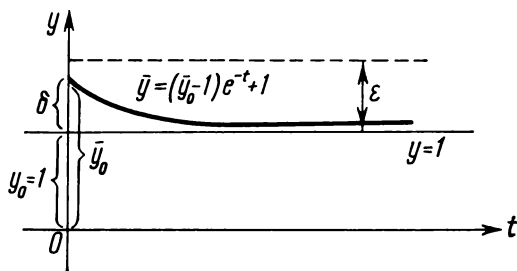



Fig. 274

Liaponnov quando $t \to \infty$ se, para todo $\varepsilon > 0$ arbitràriamente pequeno, existe $\delta > 0$ tal que se tenha para todo $t > 0$ as desigualdades

$$\left.\begin{array}{l} |\bar{x}(t) - x(t)| < \varepsilon, \\ |\bar{y}(t) - y(t)| < \varepsilon, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

desde que as condições iniciais satisfaçam às desigualdades

$$\left.\begin{array}{l} |\bar{x}_0 - x_0| < \delta, \\ |\bar{y}_0 - y_0| < \delta. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Interpretemos esta definição. Resulta das desigualdades (2) e (3) que as soluções variam pouco, qualquer que seja t positivo, quando as condições iniciais variam pouco. Se o sistema de equações diferenciais é o dum movimento, o carácter do movimento varia pouco quando as condições iniciais variam pouco se as soluções forem estáveis.

Vejamo-lo com o exemplo duma equação de primeira ordem.
Seja a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -y + 1. \qquad \text{(a)}$$

A sua solução geral é

$$y = Ce^{-t} + 1. \qquad \text{(b)}$$

Achemos a solução particular que satisfaça à condição inicial

$$y_{t=0}=1. \tag{c}$$

É evidente que esta solução $y = 1$ corresponde a $C = 0$ (fig. 274). Achemos em seguida a solução particular que sattsfaça à condição inicial

$$\bar{y}_{t=0}=\bar{y}_0.$$

Achemos o valor de C na equação (b):

$$\bar{y}_0=C+1,$$

donde

$$C=\bar{y}_0-1.$$

Substituindo este valor de C na igualdade (b), obtém-se

$$\bar{y}=(\bar{y}_0-1)\,e^{-t}+1.$$

É evidente que a solução $y = 1$ é estável. Com efeito

$$y-\bar{y}=[(\bar{y}_0-1)\,e^{-t}+1]-1=(\bar{y}_0-1)\,e^{-t} \longrightarrow 0$$

quando $t \longrightarrow \infty$.

A desigualdade (3) é, pois, verificada qualquer que seja ε desde que se tenha

$$(y_0-1)=\delta<\varepsilon.$$

Consideremos, em seguida, o sistema de equações:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=cx+gy,\\ \frac{dy}{dt}&=ax+by, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

supondo que os coeficientes a, b, c, g são constantes e $g \neq 0$.

Vejamos a que condições devem satisfazer os coeficientes para que a solução $x = 0$, $y = 0$ do sistema (4) seja estável.

Derivemos a primeira equação e eliminemos y. Obtém-se uma equação de segunda ordem:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=c\frac{dx}{dt}+g\frac{dy}{dt}=c\frac{dx}{dt}+g\,(ax+by)=$$

$$=c\frac{dx}{dt}+agx+b\left(\frac{dx}{dt}-cx\right)$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2}-(b+c)\frac{dx}{dt}-(ag-bc)\,x=0. \tag{5}$$

A equação característica escreve-se

$$\lambda^2 - (b + c)\lambda - (ag - bc) = 0. \tag{6}$$

Designemos as raízes da equação característica por λ_1 e λ_2. Os casos seguintes se podem apresentar:

1. As raízes da equação característica são reais, negativas e distintas:

$$\lambda_1 < 0, \qquad \lambda_2 < 0, \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Então,

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$y = [C_1(\lambda_1 - c)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2 - c)e^{\lambda_2 t}]\frac{1}{g}.$$

A solução que verifica as condições iniciais

$$x|_{t=0} = x_0, \qquad y|_{t=0} = y_0$$

é

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0\lambda_1 - cx_0 - y_0 g}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{\lambda_2 t}, \\ y &= \frac{1}{g}\left[\frac{cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 - c)e^{\lambda_1 t} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_0\lambda_1 - cx_0 - y_0 g}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_2 - c)e^{\lambda_2 t}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Resulta destas últimas fórmulas que, para todo $\delta > 0$, se pode escolher x_0 e y_0 suficientemente pequenos tais que se tenha para todos os $t > 0$:

$$|x(t)| < \varepsilon, \ |y(t)| < \varepsilon, \text{ dado que}$$
$$e^{\lambda_1 t} < 1 \text{ e } e^{\lambda_2 t} < 1.$$

Resulta daí que neste caso a solução $x = 0$, $y = 0$ é *estável.*

2. Sejam $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$. Tem-se

$$x = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$y = \frac{1}{g}[C_2(\lambda_2 - c)e^{\lambda_2 t} - cC_1]$$

e, como anteriormente, a solução é *estável.*

3. Seja $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Tem-se

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda_1 t},$$

$$y = \frac{1}{g}e^{\lambda_1 t}[C_1(\lambda_1 - c) + C_2(1 + \lambda_1 t - ct)].$$

Dado que

$$te^{\lambda_1 t} \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad e^{\lambda_1 t} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow \infty,$$

ter-se-á para C_1 e C_2, suficientemente pequenos (isto é, quando x_0 e y_0 sejam suficientemente pequenos) $| x(t) | < \varepsilon$ e $| y(t) | < \varepsilon$ qualquer que seja $t > 0$. A solução é estável.

4. Seja $\lambda_1 = {}_2\lambda = 0$. Tem-se

$$x = C_1 + C_2 t,$$

$$y = \frac{1}{g}[- cC_1 + C_2 - cC_2 t].$$

Vê-se que por mais pequeno que seja $C_2 \neq 0$, x e y tendem para o infinito quando $t \to \infty$, isto é, que a solução é instável.

5. Suponhamos que uma das raízes λ_1 e λ_2 é positiva, por exemplo, $\lambda_1 > 0$.

Resulta da fórmula (7) que por mais pequenos que sejam x e y, se

$$cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2 \neq 0,$$

isto é, que se $C_1 \neq 0$, $| x(t) | \to \infty$, quando $t \to \infty$.

Por conseguinte, a solução é *instável* neste caso também.

6. As raízes da equação característica são complexas e a parte real é negativa:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha + i\beta, \\ \lambda_2 &= \alpha - i\beta, \end{aligned}\right\} \alpha < 0.$$

Neste caso

$$\left.\begin{aligned} x &= Ce^{\alpha t} \operatorname{sen} (\beta t + \delta), \\ y &= \frac{1}{g} Ce^{\alpha t} [(\alpha - c) \operatorname{sen} (\beta t + \delta) + \beta \cos (\beta t + \delta)]. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

É evidente que para todo $\varepsilon > 0$ se pode tomar x_0 e y_0 de modo que se tenha $| C | < \varepsilon$ e $\frac{|\alpha - c| + |\beta|}{|d|} < \varepsilon$ e, portanto,

$$| x(t) | < \varepsilon \text{ e } | y(t) | < \varepsilon.$$

A solução é *estável*.

7. As raízes da equação característica são números imaginários puros:

$$\lambda_1 = \beta t, \qquad \lambda_2 = - \beta t.$$

Neste caso

$$x = C \operatorname{sen}(\beta t + \delta),$$

$$y = \frac{1}{g} C [\beta \cos(\beta t + \delta) - c \operatorname{sen}(\beta t + \delta)],$$

isto é, que $x(t)$ e $y(t)$ são funções periódicas de t. Verifica-se, como anteriormente, que a solução é *estável.*

8. As raízes da equação característica são complexos e a parte real é positiva ($\alpha > 0$).

Resulta das fórmulas (8) que por mais pequenos que sejam x_0 e y_0 (isto é, que para $C \neq 0$ arbitràriamente pequenos) as quantidades $|x(t)|$ e $|y(t)|$ podem tomar valores arbitràriamente grandes quanto t cresce, dado que $e^{\alpha t} \to \infty$ quando $t \to \infty$. A solução é *instável.*

Para dar um critério geral de estabilidade da solução do sistema (4), procederemos como se segue.

Escrevamos as raízes da equação característica sob a forma complexa

$$\lambda_1 = \lambda_1^* + i\lambda_1^{**},$$

$$\lambda_2 = \lambda_2^* + i\lambda_2^{**}$$

(se as raízes forem reais, $\lambda_1^{**} = 0$ e $\lambda_2^{**} = 0$).

Representaremos as raízes da equação característica por pontos no plano da variável complexa. Partindo dos oito casos examinados acima, pode-se formular a condição de estabilidade da solução do sistema (4) como se segue.

Se alguma das duas raízes λ_1 e λ_2 da equação característica (6) *não se encontrar à direita do eixo imaginário e se uma raíz pelo menos for diferente de zero, a solução é estável; se houver uma raíz à direita do eixo imaginário ou se as duas raízes forem nulas, a solução é instável.*

Consideremos agora o sistema de equações mais geral:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy + P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by + Q(x, y). \end{aligned}\right\} \qquad (4')$$

Salvo casos excepcionais, a solução dum tal sistema não se exprime por meio de funções elementares e quadraturas.

Para estabelecer a estabilidade da solução deste sistema, compara-se às soluções dum sistema linear. Suponhamos que quando $x \to 0$ e $y \to 0$

as funções $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ tendem igualmente para zero mais depressa do que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; noutros termos,

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{P(x, y)}{\rho} = 0, \qquad \lim_{\rho \to 0} \frac{Q(x, y)}{\rho} = 0.$$

Demonstra-se, então, que além dum caso excepcional, a solução do sistema (4′) é estável ou instável ao mesmo tempo que o do sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Exceptua-se o caso em que as duas raízes da equação característica se encontram sobre o eixo imaginário; então, é mais difícil de decidir da estabilidade ou da instabilidade da solução do sistema (4′).

A. Liapounov estudou a questão da estabilidade das soluções de sistemas de equações sob hipóteses bastante gerais.

§ 32. Solução aproximada das equações diferenciais de primeira ordem pelo método de Euler

Consideraremos dois métodos de resolução numérica duma equação diferencial de primeira ordem. Neste parágrafo abordaremos o *método de Euler.*

Achemos a solução aproximada da equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

sobre o segmento $[x_0, b]$, que verifica a condição inicial $y = y_0$ para $x = x_0$. Decomponhamos o segmento $[x_0, b]$ com a ajuda dos pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ em n partes iguais (aqui $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$). Introduzamos a notação $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = b - x_{n-1} = \Delta x = h$, por conseguinte,

$$h = \frac{b - x_0}{n}.$$

Seja $y = \varphi(x)$ uma certa solução aproximada da equação (1) e

$$y_0 = \varphi(x_0), \; y_1 = \varphi(x_1), \; \ldots, \; y_n = \varphi(x_n).$$

Introduzamos as notações

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \; \Delta y_1 = y_2 - y_1, \; \ldots, \; \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

Em cada um dos pontos x_0, x_1, ..., x_n da equação (1) substituámos a derivada pela relação das diferenças finitas:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f(x,\ y), \tag{2}$$

$$\Delta y=f(x,\ y)\,\Delta x. \tag{2'}$$

Para $x = x_0$, teremos

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x}=f(x_0,\ y_0),\quad \Delta y_0=f(x_0,\ y_0)\,\Delta x$$

ou

$$y_1-y_0=f(x_0,\ y_0)\,h.$$

Nesta igualdade x_0, y_0, h são conhecidos, por conseguinte, encontramos:

$$y_1=y_0+f(x_0,\ y_0)\,h$$

Para $x = x_1$ a equação (2′) será da forma

$$\Delta y_1=f(x_1,\ y_1)\,h$$

ou

$$y_2-y_1=f(x_1,\ y_1)\,h,\quad y_2=y_1+f(x_1,\ y_1)\,h.$$

x_1, y_1, h são aqui conhecidos, por conseguinte, determina-se y_2.

Do mesmo modo achamos:

$$y_3=y_2+f(x_2,\ y_2)\,h,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{k+1}=y_k+f(x_k,\ y_k)\,h,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n=y_{n-1}+f(x_{n-1},\ y_{n-1})\,h.$$

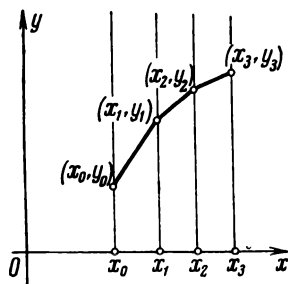



Fig. 275

Encontramos assim os valores aproximados da solução nos pontos x_0, x_1, ..., x_n. Reunindo sobre o plano das coordenadas os pontos $(x_0,\ y_0)$, $(x_1,\ y_1)$ ..., ...$(x_n,\ y_n$ por segmentos de recta obtemos uma linha quebrada que é a representação aproximada da curva integral (fig. 275). Esta linha chama-se *linha quebrada de Euler*.

Nota — Designemos por $y = \varphi_h(x)$ a solução aproximada da equação (1) correspondente à linha quebrada de Euler para $\Delta x = h$. Pode-se demonstrar que se existir uma solução única $y = \varphi^*(x)$ da

equação (1) que satisfaz às condições iniciais e determinada sobre o segmento $[x_0, b]$ então $\lim_{h \to 0} | \varphi_h (x) - \varphi^* (x) | = 0$ para todo o x do intervalo $[x_0, b]$.

Exemplo — Achar o valor aproximado para $x = 1$ da solução da equação

$$y' = y + x$$

que verifica a condição inicial: $y_0 = 1$ para $x_0 = 0$.

Resolução — Dividamos o segmento [0, 1] em 10 partes iguais com a ajuda dos pontos $x_0 = 0$; 0,1; 0,2; ...; 1,0. Por conseguinte, $h = 0{,}1$. Procuraremos os valores $y_1, y_2, \ldots, y_n$ com o auxílio das formulas (2')

$$\Delta y_k = (y_k + x_k)\, h$$

ou

$$y_{k+1} = y_k + (y_k + x_k)\, h.$$

Obtemos assim: $y_1 = 1 + (1 + 0) \cdot 0{,}1 = 1 + 0{,}1 = 1{,}1,$

$y_2 = 1{,}1 + (1{,}1 + 0{,}1) \cdot 0{,}1 = 1{,}22,$

. . . .

No decurso da resolução formamos o quadro:

x_h	y_h	$y_h + x_h$	$\Delta y_h = (y_h + x_h)\, h$
$x_0 = 0$	1,000	1,000	0,100
$x_1 = 0,1$	1,100	1,200	0,120
$x_2 = 0,2$	1,220	1,420	0,142
$x_3 = 0,3$	1,362	1,620	0,162
$x_4 = 0,4$	1,524	1,924	0,1924
$x_5 = 0,5$	1,7164	2,2164	0,2216
$x_6 = 0,6$	1,9380	2,5380	0,2538
$x_7 = 0,7$	2,1918	2,8918	0,2892
$x_8 = 0,8$	2,4810	3,2810	0,3281
$x_9 = 0,9$	2,8091	3,7091	0,3709
$x_{10} = 1,0$	3,1800		

Encontramos o valor aproximado $y|_{x=1} = 3{,}1800$. A solução exacta da equação dada, que verifica as condições iniciais citadas anteriormente, será

$$y = 2e^x - x - 1.$$

Por conseguinte,

$$y|_{x=1} = 2\,(e - 1) = 3{,}4366.$$

O erro absoluto é igual a 0,2566, o erro relativo a

$$\frac{0{,}2566}{3{,}4366} = 0{,}075 \approx 8\ \%.$$

§ 33. Solução aproximada das equações diferenciais pelo método dos diferenciais finitos baseados na aplicação da fórmula de Taylor. Método de Adams

Voltemos de novo a procurar a solução da equação

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

sobre o segmento $[x_0, b]$ que verifica a condição inicial: para $x = x_0$, $y = y_0$. Introduzamos as notações que nos servirão para a exposição. Os valores aproximados da solução nos pontos

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

serão

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

As primeiras diferenças ou as diferenças de primeira ordem serão:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ldots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

As segundas diferenças ou diferenças de segunda ordem são:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}.$$

As diferenças das diferenças de segunda ordem chamam-se diferenças de terceira ordem, etc. Designemos por $y'_0, y'_1, \ldots, y'_n$ os valores aproximados das derivadas e por $y''_0, y''_1, \ldots, y''_n$ os valores aproximados das derivadas de segunda ordem, etc. Duma maneira análoga se determinam as primeiras diferenças das derivadas

$$\Delta y'_0 = y'_1 - y'_0, \quad \Delta y'_1 = y'_2 - y'_1, \ldots, \Delta y'_{n-1} = y'_n - y'_{n-1},$$

e as segundas diferenças das derivadas

$$\Delta^2 y'_0 = \Delta y'_1 - \Delta y'_0, \quad \Delta^2 y'_1 = \Delta y'_2 - \Delta y'_1, \ldots$$

$$\ldots \Delta^2 y'_{n-2} = \Delta y'_{n-1} - \Delta y'_{n-2}, \text{ etc.}$$

Escrevamos, em seguida, a fórmula de Taylor para a solução da equação na vizinhança do ponto $x = x_0$ (t. I, cap. IV, § 6, fórmula (6)):

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1} y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} y''_0 + \ldots +$$

$$+ \frac{(x - x_0)^m}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m} y_0^m + R_m. \tag{2}$$

Nesta fórmula y_0 é conhecido e achamos os valores das derivadas y_0', y_0'', ..., a partir da equação (1) da maneira seguinte. Substituindo no segundo membro da equação (1) os valores iniciais x_0, y_0 encontramos y_0':

$$y_0' = f(x_0, y_0).$$

Derivando os termos da equação (1) em relação a x, obteremos:

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'. \tag{3}$$

Substituindo no segundo membro os valores x_0, y_0, y_0', encontramos:

$$y_0'' = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right)_{x=x_0,\ y=y_0,\ y'=y_0'}.$$

Derivando ainda uma vez a igualdade (3) em relação a x e substituindo os valores x_0, y_0, y_0', y_0'' encontramos y_0'''. Prosseguindo (*) assim podemos determinar os valores das derivadas em qualquer ordem para $x = x_0$. Todos os termos do segundo membro da fórmula (2), exceptuando o termo resto R_m são conhecidos. Assim, desprezando o termo resto, podemos obter os valores aproximados para qualquer valor de x; o seu grau de exactidão dependerá da grandeza $|x - x_0|$ e do número de termos do desenvolvimento.

No método considerado mais abaixo não se determina com a ajuda da fórmula (2) senão alguns primeiros valores de y quando $|x - x_0|$ é pequeno. Determinaremos os valores y_1 e y_2 por $x_1 = x_0 + h$ e $x_2 = x_0 + 2h$, tomando *quatro* termos do desenvolvimento (y_0 é conhecido dos dados iniciais):

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y_0' + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''', \tag{4}$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y_0' + \frac{(2h)^2}{1 \cdot 2} y_0'' + \frac{(2h)^3}{3!} y_0'''. \tag{4'}$$

Supomos, assim, conhecidos três valores (**) da função y_0, y_1, y_2. Na base destes valores, determinemos, utilizando a equação (1):

$$y_0' = f(x_0, y_0),\ y_1' = f(x_1, y_1),\ y_2' = f(x_2, y_2).$$

(*) Suporemos, no que se segue, que a função $f(x, y)$ é derivável em z e y tantas vezes quantas o exijam os raciocínios.

(**) Para uma solução dum grau de exactidão mais elevado deveríamos calcular mais que os três primeiros valores de y.

Conhecendo y'_0, y'_1, y'_2 podemos determinar $\Delta y'_0$, $\Delta y'_1$, $\Delta^2 y'_0$. Agrupemos os resultados dos cálculos no quadro seguinte:

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
x_0	y_0	y'_0		
			$\Delta y'_0$	
$x_1 = x_0 + h$	y_1	y'_1		$\Delta^2 y'_0$
			$\Delta y'_1$	
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	y'_2		
...	...	...	...	...
$x_{k-2} = x_0 + (k-2)\,h$	y_{k-2}	y'_{k-2}		
			$\Delta y'_{k-2}$	
$x_{k-1} = x_0 + (k-1)\,h$	y_{k-1}	y'_{k-1}		$\Delta^2 y'_{k-2}$
			$\Delta y'_{k-1}$	
$x_k = x_0 + kh$	y_k	y'_k		

Suponhamos, agora, que conhecemos os valores da solução

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k.$$

Baseando-nos nestes valores, podemos calcular utilizando a equação (1), os valores das derivadas

$$y'_0,\ y'_1,\ y'_2,\ \ldots,\ y'_k,$$

e, por conseguinte.

$$\Delta y_0', \ \Delta y_1', \ \ldots, \ \Delta y_{k-1}'$$

e

$$\Delta^2 y_0', \ \Delta^2 y_1', \ \ldots, \ \Delta^2 y_{k-2}'.$$

Determinemos o valor de y_{k+1}, segundo a fórmula de Taylor, fazendo $a = x_k$, $x = x_{k+1} = x_k + h$:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y_k' + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y_k'' + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} y_k''' + \ldots + \frac{h^m}{m!} y_k^{(m)} + R_m.$$

Limitemo-nos, neste caso, a quatro termos do desenvolvimento:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y_k' + \frac{h^2}{1 \cdot 2} y_k'' + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} y_k'''. \tag{5}$$

Nesta fórmula as incógnitas são y_k'' e y_k''', que procuramos determinar com a ajuda das diferenças conhecidas de primeira e segunda ordens.

Exprimamos, em primeiro lugar, y_{k-1}' com o auxílio da fórmula de Taylor, fazendo $a = x_k$, $x - a = -h$:

$$y_{k-1}' = y_k' + \frac{(-h)}{1} y_k'' + \frac{(-h)^2}{1 \cdot 2} y_k''', \tag{6}$$

e y_{k-2}', fazendo $a = x_k$, $x - a = -2h$:

$$y_{k-2}' = y_k' + \frac{(-2h)}{1} y_k'' + \frac{(-2h)^2}{1 \cdot 2} y_k'''. \tag{7}$$

Da igualdade (6) tiramos

$$y_k' - y_{k-1}' = \Delta y_{k-1}' = \frac{h}{1} y_k'' - \frac{h^2}{1 \cdot 2} y_k'''. \tag{8}$$

Subtraindo os termos da igualdade (6) pelos da igualdade (7), obtemos:

$$y_{k-1}' - y_{k-2}' = \Delta y_{k-2}' = \frac{h}{1} y_k'' - \frac{3h^2}{2} y_k'''. \tag{9}$$

De (8) e (9) tiramos

$$\Delta y_{k-1}' - \Delta y_{k-2}' = \Delta^2 y_{k-2}' = h^2 y_k'''$$

ou

$$y_k''' = \frac{1}{h^2} \Delta^2 y_{k-1}'. \tag{10}$$

Substituindo o valor de y_k''' na igualdade (8), obtemos:

$$y_k'' = \frac{\Delta y_{k-1}'}{h} + \frac{\Delta^2 y_{k-2}'}{2h}. \tag{11}$$

Achamos, assim, y_k'' e y_k'''. Substituindo as expressões (10) e (11) no desenvolvimento (5), obtemos:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y_k' + \frac{h}{2} \Delta y_{k-1}' + \frac{5h}{12} \Delta^2 y_{k-2}'. \tag{12}$$

É a chamada *fórmula de Adams* para quatro termos. A fórmula (12) permite, conhecendo y_k, y_{k-1}, y_{k-2}, determinar y_{k+1}. Assim, conhecendo y_0, y_1 e y_2 podemos encontrar y_3 e, em seguida, y_4, y_5, ...

Nota — 1. Indiquemos, sem o demonstrar, que se existir uma solução única da equação (1) sobre o segmento $[x_0, b]$ que verifica as condições iniciais, então, o erro dos valores aproximados determinados pela fórmula (12) não excede em valor absoluto Mh^4 em que M é uma constante que não depende do comprimento do intervalo e da forma da função $f(x, y)$ e independente da grandeza h.

Nota — 2. Se quisermos reduzir a margem do erro, convém tomar um maior número de termos no desenvolvimento (5) e modificar, por conseguinte, a fórmula (12). Assim, se em vez da fórmula (5) tomarmos uma fórmula cujo segundo membro contenha cinco termos, isto é, se acrescentarmos um termo de ordem h^4, obteremos, duma maneira análoga, em vez da fórmula (12) a fórmula

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y_k' + \frac{h}{2} \Delta y_{k-1}' + \frac{5h}{12} \Delta^2 y_{k-2}' + \frac{3h}{8} \Delta^3 y_{k-3}'.$$

Aqui y_{k+1} é determinado a partir dos valores y_k, y_{k-1}, y_{k-2} e y_{k-3}. Assim, antes de abordar os cálculos segundo esta fórmula, é preciso conhecer os quatro primeiros valores da solução: y_0, y_1, y_2, y_3.

No decorrer do cálculo destes valores com a ajuda das fórmulas do tipo (4) convém tomar cinco termos no desenvolvimento.

Exemplo — 1. Achar os valores aproximados da solução da equação

$$y' = y + x$$

que verifica a condição $y_0 = 1$ para $x_0 = 0$.

Determinar os valores da solução para $x = 0,1;\ 0,2;\ 0,3;\ 0,4$.

Resolução — Em primeiro lugar determinemos y_1, y_2 com a ajuda das fórmulas (4) e (4'). Obtemos da equação e das condições iniciais

$$y_0' = (y + x)_{x=0} = y_0 + 0 = 1 + 0 = 1.$$

Derivando esta equação, obtemos

$$y'' = y' + 1.$$

Por conseguinte,

$$y''_0 = (y' + 1)_{x=0} = 1 + 1 = 2.$$

Derivemos ainda uma vez

$$y''' = y''.$$

Por conseguinte,

$$y'''_0 = y''_0 = 2.$$

Substituindo na igualdade (4) os valores y_0, y'_0, y''_0 e $h = 0{,}1$, obtemos:

$$y_1 = 1 + \frac{0,1}{1}\cdot 1 + \frac{(0,1)^2}{1\cdot 2}\cdot 2 + \frac{(0,1)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2 = 1,1103.$$

Duma maneira análoga encontraremos para $h = 0{,}2$:

$$y_2 = 1 + \frac{0,2}{1}\cdot 1 + \frac{(0,1)^2}{1\cdot 2}\cdot 2 + \frac{(0,2)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2 = 1,2427.$$

Conhecendo y_0, y_1, y_2 obteremos a partir da equação:

$$y'_0 = y_0 + x_0 = 1\ ;$$
$$y'_1 = y_1 + x_1 = 1,1103 + 0,1 = 1,2103\ ;$$
$$y'_2 = y_2 + x_2 = 1,2427 + 0,2 = 1,4427\ ;$$
$$\Delta y'_0 = 0,2103\ ;$$
$$\Delta y'_1 = 0,2324\ ;$$
$$\Delta^2 y'_0 = 0,0221.$$

Com os valores obtidos, teremos o quadro seguinte:

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1,0000$	$y'_0 = 1$		
			$\Delta y'_0 = 0,2103$	
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 1,1103$	$y'_1 = 1,2103$		$\Delta^2 y'_0 = 0,0221$
			$\Delta y'_1 = 0,2324$	
$x_2 = 0.2$	$y_2 = 1,2427$	$y'_2 = 1,4427$		$\Delta^2 y'_1 = 0,0244$
			$\Delta y'_2 = 0,2568$	
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 1,3995$	$y'_3 = 1,6995$		
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 1,5833$			

Tiramos y_3 da fórmula (12):

$$y_3 = 1{,}2427 + \frac{0{,}1}{1} \cdot 1{,}4427 + \frac{0{,}1}{2} \cdot 0{,}2324 + \frac{5 \cdot (0{,}1)}{12} \cdot 0{,}0221 = 1{,}3995.$$

Em seguida, encontramos os valores y'_3, $\Delta y'_2$, $\Delta^2 y'_1$. Depois, com o auxílio da mesma fórmula (12) encontramos y_4:

$$y_4 = 1{,}3995 + \frac{0{,}1}{1} \cdot 1{,}6995 + \frac{0{,}1}{2} \cdot 0{,}2568 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}0244 = 1{,}5833.$$

A expressão da solução desta equação é:

$$y = 2e^x - x - 1.$$

Por conseguinte, $y_{x=0,4} = 2e^{0,4} - 0{,}4 - 1 = 1{,}58364$. O erro absoluto é 0,0003; o erro relativo: $\frac{0{,}0003}{1{,}58364} \approx 0{,}0002 = 0{,}02\ \%$. (O erro absoluto do valor y_4 calculado pelo método de Euler é de 0,06: o erro relativo: $0{,}038 \approx 3{,}8\ \%$).

Exemplo — 2. Achar os valores aproximados da solução da equação

$$y' = y^2 + x^2,$$

que verifica a condição inicial: $y_0 = 0$ para $x_0 = 0$.
Determinemos os valores da solução para $x = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}4$.

Resolução — Achamos:

$$y'_0 = 0^2 + 0^2 = 0,$$

$$y''_{x=0} = (2yy' + 2x)_{x=0} = 0,$$

$$y'''_{x=0} = (2y'^2 + 2yy'' + 2)_{x=0} = 2.$$

Das fórmulas (4) e (4′), obtemos:

$$y_1 = \frac{(0{,}1)^3}{3\,!} \cdot 2 = 0{,}0003, \qquad y_2 = \frac{(0{,}2)^3}{3\,!} \cdot 2 = 0{,}0027.$$

Da equação tiramos:

$$y'_0 = 0,\ y'_1 = 0{,}0100,\ y'_2 = 0{,}0400.$$

Com o auxílio destes valores compomos as primeiras linhas do quadro, depois, determinamos os valores de y_3 e y_4 segundo a fórmula (12).
Assim,

$$y_3 = 0{,}0027 + \frac{0{,}1}{1} \cdot 0{,}0400 + \frac{0{,}1}{2} \cdot 0{,}0300 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}0200 = 0{,}0090,$$

$$y_4 = 0{,}0090 + \frac{0{,}1}{1} \cdot 0{,}0901 + \frac{0{,}1}{2} \cdot 0{,}0501 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}0201 = 0{,}0214.$$

Notemos que para y_4 os quatro primeiros números exactos depois da vírgula são: $y_4 = 0{,}0213$ (pode-se obtê-los por outros métodos mais precisos que permitem avaliar o erro).

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0=0$	$y_0=0$	$y'_0=0$		
			$\Delta y'_0=0,0100$	
$x_1=0,1$	$y_1=0,0003$	$y'_1=0,0100$		$\Delta^2 y'_0=0,0200$
			$\Delta y'_1=0,0300$	
$x_2=0,2$	$y_2=0,0027$	$y'_2=0,0400$		$\Delta^2 y'_1=0,0201$
			$\Delta y'_2=0,0501$	
$x_3=0,3$	$y_3=0,0090$	$y'_3=0,0901$		
$x_4=0,4$	$y_4=0,0214$			

§ 34. Método aproximado de integração dos sistemas de equações diferenciais de primeira ordem

Os métodos de integração aproximados das equações diferenciais considerados nos §§ 32 e 33 podem ser aplicados, igualmente, para a resolução dos sistemas de equações diferenciais de primeira ordem. Consideremos, agora, o método das diferenças para a resolução de sistemas de equações. Conduziremos os raciocínios para um sistema de duas equações que comporta duas funções desconhecidas. Pede-se para procurar as soluções do sistema de equações

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x,\ y,\ z), \tag{1}$$

$$\frac{dz}{dx}=f_2(x,\ y,\ z), \tag{2}$$

que verifica as condições iniciais: para $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Determinaremos os valores das funções y e z para os valores da variável independente $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots x_n$.

Seja de novo

$$x_{k+1} - x_k = \Delta x = h \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{3}$$

Os valores aproximados da função serão notados por

$$y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_k,\ y_{k+1},\ \ldots,\ y_n$$

e, respectivamente,

$$z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_k,\ z_{k+1},\ \ldots,\ z_n.$$

Escrevamos as fórmulas de recorrência do tipo (12) do § 33:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5}{12} h \Delta^2 y'_{k-2}, \tag{4}$$

$$z_{k+1} = z_k + \frac{h}{1} z'_k + \frac{h}{2} \Delta z'_{k-1} + \frac{5}{12} h \Delta^2 z'_{k-2}. \tag{5}$$

Para abordar os cálculos segundo estas fórmulas torna-se necessário conhecer, além dos y_0 e z_0 dados, y_1, y_2; z_1, z_2; encontraremos estes valores pelas fórmulas do tipo (4) e (4') do § 32:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0,$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y'_0 + \frac{(2h)^2}{2} y''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} y'''_0,$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{1} z'_0 + \frac{h^2}{2} z''_0 + \frac{h^3}{3!} z'''_0,$$

$$z_2 = z_0 + \frac{2h}{1} z'_0 + \frac{(2h)^2}{2} z''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} z'''_0.$$

Para aplicar estas fórmulas é preciso conhecer y'_0, y''_0, y'''_0, z'_0, z''_0, z'''_0 que vamos agora determinar. Tiremos, agora, das equações (1) e (2)

$$y'_0 = f_1(x_0,\ y_0,\ z_0),$$

$$z'_0 = f_2(x_0,\ y_0,\ z_0).$$

Derivando as equações (1) e (2) e substituindo os valores x_0, y_0, z_0, y'_0 e z'_0, encontramos:

$$y''_0 = (y'')_{x=x_0} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial z} z' \right)_{x=x_0},$$

$$z''_0 = (z'')_{x=x_0} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} y' + \frac{\partial f_2}{\partial z} z' \right)_{x=x_0}.$$

Derivando, ainda uma vez, obtemos y_0''' e z_0'''. Conhecendo y_1, y_2, z_1, z_2, tiramos das equações (1) e (2)

$$y_1', \ y_2', \ z_1', \ z_2', \ \Delta y_0', \ \Delta y_1', \ \Delta^2 y_0', \ \Delta z_0', \ \Delta z_1', \ \Delta^2 z_0',$$

o que nos permite compor as primeiras cinco linhas do quadro

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	z	z'	$\Delta z'$	$\Delta^2 z'$
x_0	y_0	y_0'			z_0	z_0'		
			$\Delta y_0'$				$\Delta z_0'$	
x_1	y_1	y_1'		$\Delta^2 y_0'$	z_1	z_1'		$\Delta^2 z_0'$
			$\Delta y_1'$				$\Delta z_1'$	
x_2	y_2	y_2'		$\Delta^2 y_1'$	z_2	z_2'		$\Delta^2 z_1'$
			$\Delta y_2'$				$\Delta z_2'$	
x_3	y_3	y_3'			z_3	z_3'		

Das fórmulas (4) e (5) obtemos y_3 e z_3 e das equações (1) e (2) y_3' e z_3'. Calculando $\Delta y_2'$, $\Delta^2 y_1'$, $\Delta z_2'$, $\Delta^2 z_1'$ encontramos, utilizando de novo as fórmulas (4) e (5), y_4 e y_5 e assim sucessivamente.

Exemplo — Encontrar os valores aproximados das soluções do sistema

$$y' = z, \quad z' = y$$

para as condições iniciais: $y_0 = 0$, $z_0 = 1$ para $x = 0$.

Calcular os valores das soluções para $x = 0$; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4.

Resolução — Tiramos destas equações:

$$y_0' = z_{x=0} = 1,$$
$$z_0' = y_{x=0} = 0.$$

Derivando estas equações teremos:

$$y_0'' = (y'')_{x=0} = (z')_{x=0} = 0,$$
$$z_0'' = (z'')_{x=0} = (y')_{x=0} = 1,$$
$$y_0''' = (y''')_{x=0} = (z'')_{x=0} = 1,$$
$$z_0''' = (z''')_{x=0} = (y'')_{x=0} = 0.$$

Aplicando as fórmulas do tipo (4) e (5), obtemos:

$$y_1 = 0 + \frac{0,1}{1} \cdot 1 + \frac{(0,1)^2}{1 \cdot 2} \cdot 0 + \frac{(0,1)^3}{3\,!} \cdot 1 = 0,1002,$$

$$y_2 = 0 + \frac{0,2}{1} \cdot 1 + \frac{(0,2)^2}{1 \cdot 2} \cdot 0 + \frac{(0,2)^3}{3\,!} \cdot 1 = 0,2013,$$

$$z_1 = 1 + \frac{0,1}{1} \cdot 0 + \frac{(0,1)^2}{1 \cdot 2} \cdot 1 + \frac{(0,1)^3}{3\,!} \cdot 0 = 1,0050,$$

$$z_2 = 1 + \frac{0,2}{1} \cdot 0 + \frac{(0,2)^2}{2\,!} \cdot 1 + \frac{(0,2)^3}{3\,!} \cdot 0 = 1,0200.$$

Dos dados obtidos, tiramos:

$$y_1' = 1,0050, \qquad y_2' = 1,0200,$$
$$z_1' = 0,1002, \qquad z_2' = 0,2013,$$
$$\Delta y_0' = 0,0050, \qquad \Delta z_0' = 0,1002,$$
$$\Delta y_1' = 0,0150, \qquad \Delta z_1' = 0,1011,$$
$$\Delta^2 y_0' = 0,0100, \qquad \Delta^2 z_0' = 0,0009$$

e compomos as cinco primeiras linhas do quadro:

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$y_0' = 1$		
			$\Delta y_0' = 0,0050$	
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 0,1002$	$y_1' = 1,0050$		$\Delta^2 y_0' = 0,0100$
			$\Delta y_1' = 0,0150$	
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 0,2013$	$y_2' = 1,0200$		$\Delta^2 y_1' = 0,0102$
			$\Delta y_2' = 0,0252$	
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 0,3045$	$y_3' = 1,0452$		
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 0,4107$			

x	z	z'	$\Delta z'$	$\Delta^2 z'$
$x_0=0$	$z_0=1$	$z'_0=0$		
			$\Delta z'_0=0,1002$	
$x_1=0,1$	$z_1=1,0050$	$z'_1=0,1002$		$\Delta^2 z'_0=0,0009$
			$\Delta z'_1=0,1011$	
$x_2=0,2$	$z_2=1,0200$	$z'_2=0,2013$		$\Delta^2 z'_2=0,0021$
			$\Delta z'_2=0,1032$	
$x_3=0,3$	$z_3=1,0452$	$z'_3=0,3045$		
$x_4=0,4$	$z_4=1,0809$			

Com a ajuda das fórmulas (4) e (5) encontramos:

$$y_3=0,2013+\frac{0,1}{1}\cdot 1,0200+\frac{0,1}{2\,!}\cdot 0,0150+\frac{5}{12}\cdot 0,1\cdot 0,0100=0,3045,$$

$$z_3=1,0200+\frac{0,1}{1}\cdot 0,2013+\frac{0,1}{2}\cdot 0,1011+\frac{5}{12}\cdot 0,1\cdot 0,0009=1,0452$$

e de maneira análoga:

$$y_4=0,3045+\frac{0,1}{1}\cdot 1,0452+\frac{0,1}{2}\cdot 0,0252+\frac{5}{12}\cdot 0,1\cdot 0,0102=0,4107,$$

$$z_4=1,0452+\frac{0,1}{1}\cdot 0,3045+\frac{0,1}{2}\cdot 0,1032+\frac{5}{12}\cdot 0,1\cdot 0,0021=1,0809.$$

É evidente que as soluções exactas do sistema dado de equações que verificam ás condições iniciais serão:

$$y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}), \qquad z=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}).$$

Eis porque os quatro primeiros algarismos exactos, após a vírgula, serão:

$$y_4=\frac{1}{2}(e^{0,4}-e^{-0,4})=0,4107,$$

$$z_4=\frac{1}{2}(e^{0,4}+e^{-0,4})=1,0811.$$

Nota — Como as equações de ordem superior e os sistemas de equações de ordens superiores se reduzem em numerosos casos a um sistema de equações de primeira ordem, o método exposto é igualmente aplicável à resolução destes problemas.

Exercícios

Mostrar que as funções abaixo dependentes de constantes arbitrárias satisfazem às equações diferenciais em frente.

Funções	*Equações diferenciais*
1. $y = \operatorname{sen} x - 1 + Ce^{-\operatorname{sen} x}$	$\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x.$
2. $y = Cx + C - C^2.$	$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} + y = 0.$
3. $y^2 = 2Cx + C^2.$	$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0.$
4. $y^2 = Cx^2 - \frac{a^2C}{1+C}.$	$xy\left[1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = (x^2 - y^2 - a^2)\frac{dy}{dx}.$
5. $y = C_1x + \frac{C_2}{x} + C_3.$	$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{3}{x}\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$
6. $y = (C_1 + C_2x)e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2}.$	$\frac{d^2y}{dx^2} - 2k\frac{dy}{dx} + k^2y = e^x.$
7. $y = C_1e^{a \operatorname{arc\,sen} x} + C_2e^{-a \operatorname{arc\,sen} x}.$	$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0.$
8. $y = \frac{C_1}{x} + C_2.$	$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} = 0.$

Integrar as equações de variáveis separáveis.

9. $y\,dx - x\,dy = 0.$ Resp. $y = Cx.$
10. $(1+u)\,v\,du + (1-v)\,u\,dv = 0.$ Resp. Log. $uv + u - v = C.$
11. $(1+y)\,dx - (1-x)\,dy = 0.$ Resp. $(1+y)(1-x) = C.$
12. $(t^2 - xt^2)\frac{dx}{dt} + x^2 + tx^2 = 0.$ Resp. $\frac{t+x}{tx} + \operatorname{Log}\frac{x}{t} = C.$
13. $(y-a)\,dx + x^2\,dy = 0.$ Resp. $(y-a) = Ce^{\frac{1}{x}}.$
14. $z\,dt - (t^2 - a^2)\,dz = 0.$ Resp. $z^{2a} = C\frac{t-a}{t+a}.$
15. $\frac{dx}{dy} = \frac{1+x^2}{1+y^2}.$ Resp. $x = \frac{y+C}{1-Cy}.$
16. $(1+s^2)\,dt - \sqrt{t}\,ds = 0.$ Resp. $2\sqrt{t} - \operatorname{arc\,tg} s = C.$
17. $d\rho + \rho \operatorname{tg}\theta\, d\theta = 0.$ Resp. $\rho = C\cos\theta.$
18. $\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\, d\theta - \cos\theta \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = 0.$ Resp. $\cos\varphi = C\cos\theta.$
19. $\sec^2\theta \operatorname{tg}\varphi\, d\theta + \sec^2\varphi \operatorname{tg}\theta\, d\varphi = 0.$ Resp. $\operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\varphi = C.$
20. $\sec^2\theta \operatorname{tg}\varphi\, d\varphi + \sec^2\varphi \operatorname{tg}\theta\, d\theta = 0.$ Resp. $\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\varphi = C.$
21. $(1+x^2)\,dy - \sqrt{1-y^2}\,dx = 0.$ Resp. $\operatorname{arc\,sen} y - \operatorname{arc\,tg} x = C.$

22. $\sqrt{1-x^2}\,dy-\sqrt{1-y^2}\,dx=0$. Resp. $y\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-y^2}=C$.

23. $3e^x \operatorname{tg} y\,dx+(1-e^x)\sec^2 y\,dy=0$. Resp. $\operatorname{tg} y=C(1-e^x)^3$.

24. $(x-y^2x)\,dx+(y-x^2y)\,dy=0$. Resp. $x^2+y^2=x^2y^2+C$.

Estabelecimento de equações diferenciais

25. Mostrar que a curva cujo declive da tangente em cada ponto é proporcional à abcissa do ponto de contacto é uma parábola. Resp. $y=ax^2+C$.

26. Determinar uma curva que passa pelo ponto (0, -2) tal que o declive da tangente em cada ponto seja igual à ordenada correspondente aumentada de 3 unidades. Resp. $y=e^x-3$.

27. Determinar uma curva que passe pelo ponto (1, 1) tal que o declive da tangente em cada ponto seja proporcional ao quadradc da ordenada desse ponto. Resp. $k(x-1)\,y-y+1=0$.

28. Determinar uma curva cujo declive da tangente em cada ponto seja n vezes maior que o da recta que reúne este ponto à origem das coordenadas. Resp. $y=Cx^n$.

29. Fazer passar pelo ponto (2, 1) uma curva cuja tangente em cada ponto coincida com o raio vector traçado da origem a esse ponto. Resp. $y=\frac{1}{2}x$.

30. Encontrar em coordenadas polares a equação duma curva tal que em cada ponto a tangente do ângulo formado pelo raio vector e a tangente à curva seja igual ao inverso mudado do sinal do raio vector. Resp. $r(\theta+C)=1$.

31. Encontrar em coordenadas polares a equação duma curva tal que em cada ponto a tangente do ângulo formado pelo raio vector e a tangente à curva seja igual ao quadrado do raio vector. Resp. $r^2=(\theta+C)\,2$.

32. Mostrar que a curva que goza da propriedade de todas as suas normais passarem por um ponto fixo é um círculo.

33. Achar uma curva tal que em cada ponto a subtangente seja igual ao dobro da abcissa. Resp. $y=C\sqrt{x}$.

34. Determinar uma curva cujo raio vector seja igual à porção de tangente compreendida entre o ponto de tangência e a sua intersecção com o eixo Ox.

Resolução — De acordo com as condições do problema $\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}=$ $=\sqrt{x^2+y^2}$, donde $\frac{dy}{y}=\pm\frac{dx}{x}$. Integrando-o, obtém-se duas famílias de curvas: $y=Cx$ e $y=\frac{C}{x}$.

Segundo a lei de Newton, a velocidade de arrefecimento dum corpo qualquer no ar é proporcional à diferença de temperaturas entre o corpo e o meio. Sendo a temperatura do ar 20° C, o corpo arrefece de 100° a 60° C no espaço de 20 minutos. Quanto tempo demorará a temperatura a baixar a 30° C?

Resolução — A equação diferencial do problema é $\frac{dT}{dt}=k(T-20)$. Integrando, vem $T-20=Ce^{kt}$; $T=100$ quando $t=0$; $T=60$ quando $t=20$;

logo $C = 80$, donde $40 = Ce^{20k}$, $e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}$, por conseguinte, $T = 20 +$ $+ 80 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. Fazendo $T = 30$, vem $t = 60$ minutos.

36. Considere-se um funil cónico de ângulo 60° no cimo e de altura 10 cm. Ao fim de que tempo T o funil ficará vazio, sabendo que a água passa por uma abertura de 0,5 cm² no fundo?

Resolução — Calculemos de duas maneiras diferentes o volume de água que corre entre os instantes t e $t + \Delta t$. À velocidade constante v, escapa em um segundo uma coluna de água de secção 0,5 cm² de altura h. Escapa-se, pois, no tempo Δt uma quantidade de água de dv

$$-dv = -0{,}5v\,dt = -0{,}3\sqrt{2gh}\,dt\ ^{*}).$$

Por outra via, diminuindo a altura com o escoamento, o seu acréscimo dh é negativo e tem-se:

$$-dv = \pi r^2\,dh = \frac{\pi}{3}(h + 0{,}7)^2\,dh.$$

De modo que

$$\frac{\pi}{3}(h + 0{,}7)^2\,dh = -0{,}3\sqrt{2gh}\,dt,$$

donde

$$t = 0{,}0315\,(10^{5/2} - h^{5/2}) + 0{,}0732\,(10^{3/2} - h^{3/2}) + 0{,}078\,(\sqrt{10} - \sqrt{h}).$$

Fazendo $h = 0$, obtém-se o tempo de escoamento $T = 12{,}5$ segundos.

37. A travagem dum disco que gira num líquido é proporcional à velocidade angular de rotação ω. Achar a dependência entre a velocidade angular e o tempo, sabendo que a velocidade angular do disco baixa de 100 r/m para 60 r/m no espaço de um minuto. Resp. $\omega = 100\,(^3/_5)^t$ tr/mn.

38. Suponha-se que a pressão de ar vertical numa dada secção depende da pressão das massas de ar superiores. Encontrar a dependência entre a pressão e a altitude, sabendo que a pressão é de 1 kg/cm² ao nível do mar e de 0,92 kg/cm² a 500 metros de altitude

Indicação — Servir-se da lei de Mariotte em virtude da qual a densidade dum gás é proporcional à sua pressão. A equação diferencial do problema é $dp = -kp\,dh$, donde $p = e^{-0{,}00017h}$. Resp. $p = e^{-0{,}00017h}$.

Integrar as equações homogéneas seguintes:

39. $(y - x)\,dx + (y + x)\,dy = 0$. Resp. $y^2 + 2xy - x^2 = C$.

40. $(x + y)\,dx + x\,dy = 0$. Resp. $x^2 + 2xy = C$.

41. $(x + y)\,dx + (y - x)\,dy = 0$. Resp. $\operatorname{Log}(x^2 + y^2)^{1/2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = C$.

42. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$. Resp. $1 + 2Cy - C^2x^2 = 0$.

43. $(8y + 10x)\,dx + (5y + 7x)\,dy = 0$. Resp. $(x + y)^2\,(2x + y)^3 = C$.

(*) A velocidade de escoamento v da água por uma abertura que se encontra à distância h da superfície livre, é dada pela fórmula $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$, em que g é a aceleração no campo da gravidade.

44. $(2\sqrt{st}-s)\,dt+t\,ds=0$. **Resp.** $te^{\sqrt{\frac{s}{t}}}=C$ ou $s=t\,\mathrm{Log}^2\frac{C}{t}$. **Resp.**

45. $(t-s)\,dt+t\,ds=0$. **Resp.** $te^{\frac{s}{t}}=C$ ou $s=t\,\mathrm{Log}\,\frac{C}{t}$. **Resp.**

46. $xy^2\,dy=(x^3+y^3)\,dx$. **Resp.** $y=x\sqrt[3]{3\,\mathrm{Log}\,Cx}$.

47. $x\cos\frac{y}{x}(y\,dx+x\,dy)=y\,\mathrm{sen}\frac{y}{x}(x\,dy-y\,dx)$. **Resp.** $xy\cos\frac{y}{x}=C$.

Integrar as equações diferenciais seguintes, reduzindo-as a equações homogéneas:

48. $(3y-7x+7)\,dx-(3x-7y-3)\,dy=0$. **Resp.** $(x+y-1)^5(x-y-1)^2=C$.

49. $(x+2y+1)\,dx-(2x+4y+3)\,dy=0$. **Resp.** $\mathrm{Log}\,(4x+8y+5)+8y-4x=C$.

50. $(x+2y+1)\,dx-(2x-3)\,dy=0$. **Resp.** $\mathrm{Log}\,(2x-3)-\frac{4y+5}{2x-3}=C$.

51. Determinar a curva cuja subnormal é a média aritmética entre a abcissa e a ordenada do ponto da curva considerada. Resp. $(x-y)^2(x+2y)=C$.

52. Determinar a curva cuja relação do segmento cortado pela tangente sobre o eixo Oy pelo raio vector é uma constante.

Resolução — Por hipótese, tem-se $\dfrac{y-x\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}}=m$, donde $\left(\dfrac{x}{C}\right)^m-\left(\dfrac{C}{x}\right)^m=$ $=\dfrac{2y}{x}$.

53. Determinar a curva cuja relação do segmento cortado pela normal sobre o eixo Ox pelo raio vector é uma constante.

Resolução — Por hipótese $\dfrac{x+y\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}}=m$, donde $x^2+y^2=m^2(x-C)^2$.

54. Determinar a curva cujo segmento cortado pela tangente sobre o eixo Oy é igual a $\sec\theta$ em que θ é o ângulo entre o raio vector e o eixo Ox.

Resolução — Como se tem $\mathrm{tg}\,\theta=\frac{y}{x}$ e, por hipótese,

$$y=x\frac{dy}{dx}=a\sec\theta,$$

obtém-se

$$y-x\frac{dy}{dx}=a\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

donde

$$y=\frac{x}{2}\left[e^{\frac{a}{x}+b}-e^{-\left(\frac{a}{x}+b\right)}\right].$$

55. Determinar a curva sujo segmento cortado pela normal sobre o eixo Oy é igual à distância do ponto considerado à origem das coordenadas.

Resolução — O segmento cortado pela normal no eixo Oy é igual a à $y+\frac{x}{y'}$; logo, por hipótese, tem-se

$$y+\frac{x}{y'}=\sqrt{x^2-y^2},$$

donde

$$x^2=C\,(2y+C).$$

56. Achar a forma de um espelho tal que os raios provenientes dum ponto O sejam reflectidos paralelamente a uma dada direcção.

Resolução — Identifiquemos esta direcção com o eixo Ox e seja O a origem. Sejam OM o raio incidente, MP o raio reflectido, MQ a normal à curva procurada:

$$\alpha=\beta;\; OM=OQ,\; NM=y,$$

$$NQ=NO+OQ=-x+\sqrt{x^2+y^2}=y\,\text{cotg}\,\beta=y\,\frac{dy}{dx},$$

donde

$$y\,dy=\left(-x+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx;$$

por integração, encontra-se

$$y^2=C^2+2Cx.$$

Integrar as seguintes equações diferenciais lineares:

57. $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$. Resp. $2y=(x+1)^4+C\,(x+1)^2$.

58. $y'-a\,\frac{y}{x}=\frac{x+1}{x}$. Resp. $y=Cx^a+\frac{x}{1-a}-\frac{1}{a}$.

59. $(x-x^3)\,y'+(2x^2-1)\,y-ax^3=0$. Resp. $y=ax+Cx\sqrt{1-x^2}$.

60. $\frac{ds}{dt}\cos t+s\,\text{sen}\,t=1$. Resp. $s=\text{sen}\,t+C\cos t$.

61. $\frac{ds}{dt}+s\cos t=\frac{1}{2}\text{sen}\,2t$. Resp. $s=\text{sen}\,t-1+Ce^{-\text{sen}\,t}$

62. $y'-\frac{n}{x}\,y=e^x x^n$. Resp. $y=x^n\,(e^x+C)$.

63. $y'+\frac{n}{x}\,y=\frac{a}{x^n}$. Resp. $x^n y=ax+C$.

64. $y'+y=\frac{1}{e^x}$. Resp. $e^x y=x+C$.

65. $y'+\frac{1-2x}{x^2}\,y-1=0$. Resp. $y=x^2\,(1+Ce^{\frac{1}{x}})$.

Integrar as equações de Bernoulli:

66. $y'+xy=x^3y^3$. Resp. $y^2\,(x^2+1+Ce^{x^2})=1$.

67. $(1-x^2)\,y'-xy-axy^2=0$. Resp. $\left(C\sqrt{1-x^2}-a\right)y=1$.

68. $3y^2y'-ay^3-x-1=0$. Resp. $a^2y^3=Ce^{ax}-a\,(x+1)-1$.

69. $y'\,(x^2y^3+xy)=1$. Resp. $x\left[(2-y^2)\,e^{\frac{1}{2}y^2}+C\right]=e^{\frac{1}{2}y^2}$

70. $(y \operatorname{Log} x - 2)\, y\, dx = x\, dy$. Resp. $y\,(Cx + \operatorname{Log} x + 1) = 1$.

71. $y - y' \cos x = y^2 \cos x\,(1 - \operatorname{sen} x)$. Resp. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x + \sec x}{\operatorname{sen} x + C}$.

Integrar as seguintes equações de diferenciais totais:

72. $(x^2 + y)\, dx + (x - 2y)\, dy = 0$. Resp. $\dfrac{x^3}{3} + yx - y^2 = C$.

73. $(y - 3x^2)\, dx - (4y - x)\, dy = 0$. Resp. $2y^2 - xy + x^3 = C$.

74. $(y^3 - x)\, y' = y$. Resp. $y^4 = 4xy + C$.

75. $\left[\dfrac{y^2}{(x-y)^2} - \dfrac{1}{x}\right] dx + \left[\dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right] dy = 0$.

Resp. $\operatorname{Log} \dfrac{y}{x} - \dfrac{xy}{x-y} = C$.

76. $2\,(3xy^2 + 2x^3)\, dx + 3\,(2x^2 y + y^2)\, dy = 0$. Resp. $x^4 + 3x^2y^2 + y^3 = C$.

77. $\dfrac{x\, dx + (2x + y)\, dy}{(x+y)^2} = 0$. Resp. $\operatorname{Log}(x+y) - \dfrac{x}{x+y} = C$.

78. $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}\right) dx = \dfrac{2y\, dy}{x^3}$. Resp. $x^2 + y^2 = Cx^3$.

79. $\dfrac{x^2\, dy - y^2\, dx}{(x-y)^2} = 0$. Resp. $\dfrac{xy}{x-y} = C$.

80. $x\, dx + y\, dy = \dfrac{y\, dx - x\, dy}{x^2 + y^2}$. Resp. $x^2 + y^2 - 2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y} = C$.

81. Encontrar as curvas que gozam da propriedade segundo a qual o produto do quadrado da distância dum ponto qualquer tomado sobre a curva considerada na origem pelo segmento cortado pela normal sobre o eixo das abcissas é igual ao cubo da abcissa do ponto. Resp. $y^2\,(2x^2 + y^2) = C$.

8 Encontrar os envoltórios das famílias de curvas seguintes: a) $y = Cx + C^2$. Resp. $x^2 + 4y = 0$. b) $y = \dfrac{x}{C} + C^2$. Resp. $27x^2 = 4y^3$. c) $\dfrac{x}{C} - \dfrac{y}{C^3} = 2$. Resp. $27y = x^3$. d) $C^2x + Cy - 1 = 0$. Resp. $y^2 + 4x = 0$. e) $(x - C)^3 + (y - C)^2 = C^2$. Resp. $x = 0$; $y = 0$. f) $(x - C)^2 + y^2 = 4C$. Resp. $y^2 = 4x + 4$. g) $(x - C)^2 + (y - C)^2 = 4$. Resp. $(x - y)^2 = 8$. h) $Cx^2 + C^2y = 1$. Resp. $x^4 + 4y = 0$.

83. Uma recta desloca-se de tal maneira que a soma dos segmentos que ela corta sobre os eixos de coordenadas é igual a uma constante α. Procurar o envoltório desta família de rectas. Resp. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ (parábola).

84. Achar o envoltório duma família de rectas tais que os eixos de coordenadas cortem sobre estas rectas, segmentos de comprimento constante a. Resp. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

85. Achar o envoltório duma família de círculos, cujos diâmetros sejam duplos das ordenadas da parábola $y^2 = 2px$. Resp. $y^2 = 2p\left(x + \dfrac{p}{2}\right)$

86. Achar o envoltório duma família de círculos centrados sobre a paróbola $y^2 = 2px$ e que passe pelo vértice da parábola. Resp. «cissoide». $x^3 + y^2\,(x + 2p) = 0$.

87. Achar o envoltório duma família de círculos cujos diâmetros são as curvas da elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ perpendiculares ao eixo Ox. Resp. $\frac{x^2}{a^2+b^2}+$ $+\frac{y^2}{b^2}=1$.

88. Achar a evoluta da elipse $x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$ como envoltório das suas normais. Resp. $(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3}$.

Integrar as seguintes equações (Equações de Lagrange):

89. $y=2xy'+y'^2$. Resp. $x=\frac{C}{3p^2}-\frac{2}{3}p$; $y=\frac{2C-p^3}{3p}$.

90. $y=xy'^2+y'^2$. Resp. $y=(\sqrt{x+1}+C)^2$. Integral singular : $y=0$.

91. $y=x(1+y')+(y')^2$. Resp. $x=Ce^{-p}-2p+2$; $y=C(p+1)c^{-p}-p^2+2$.

92. $y=yy'^2+2xy'$. Resp. $4Cx=4C^2-y^2$.

93. Determinar as curvas à normal constante. Resp. $(x-C)^2+y^2=a^2$. Integral singular: $y=\pm a$.

94. $y=xy'+y'-y'^2$. Resp. $y=Cx+C-C^2$. Integral singular: : $4y=$ $=(x+1)^2$.

95. $y=xy'+\sqrt{1-y'^2}$. Resp. $y=Cx+\sqrt{1-C^2}$. Integral singular : $y^2-x^2=1$.

96. $y=xy'+y'$. Resp. $y=Cx+C$.

97. $y=xy'+\frac{1}{y'}$. Resp. $y=Cx+\frac{1}{C}$. Integral singular : $y^2=4x$.

98. $y=xy'-\frac{1}{y'^2}$. Resp. $y=Cx-\frac{1}{C^2}$. Integral singular : $y^3=-\frac{27}{4}x^2$.

99. A área do triângulo formado pela tangente a uma curva e os eixos de coordenadas é constante. Achar essa curva. Resp. As hipérboles equiláteras $4xy=\pm a^2$, bem como as rectas da família $y=Cx\pm a\sqrt{C}$.

100. Achar uma curva tal que o segmento da sua tangente compreendida entre os eixos de coordenadas tenha um comprimento constante a. Resp. $y=Cx\pm$ $\pm\frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$. Solução singular : $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

101. Achar uma curva tal que a soma dos segmentos cortados pelas suas tangentes sobre os eixos coordenados seja igual à contante $2a$. Resp. $y=Cx-$ $-\frac{2aC}{1-C}$. Solução singular: $(y-x-2a)^2=8ax$.

102. Achar as curvas tais que o produto das distâncias de dois pontos dados à tangente seja constante. Resp. Elipses e hipérboles (trajectórias ortogonais e isogonais).

103. Achar as trajectórias ortogonais da família de curvas $y=ax^n$. Resp. x^2+ $+ny^2=C$.

104. Achar as trajectórias ortogonais da família de parábolas $y^2=2p(x-\alpha)$ (α é o parâmetro da família). Resp. $y=Ce^{-\frac{x}{p}}$.

105. Achar as trajectórias ortogonais da famílias das curvas $x^2-y^2=\alpha$ (sendo α o parâmetro). Resp. $y=\frac{C}{x}$.

106. Achar as trajectórias ortogonais da família de círculos $x^2+y^2=2ax$. Resp. Os círculos;

$$y=C(x^2+y^2)$$

107. Achar as trajectórias ortogonais de parábolas iguais às tangentes nos seus vértices a uma recta dada. Resp. Se o parâmetro das parábolas for $2p$ e se Oy for a recta dada, a equação das trajectórias será $y+C=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{p}}\,x^{3/2}$.

108. Achar as trajectórias ortogonais das cissoïdes $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$. Resp. $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)\,a^2$.

109. Achar as trajectórias ortogonais das lemniscatas $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)a^2$. Resp. $(x^2+y^2)^2=Cxy$.

110. Achar as trajectórias isogonais da família de curvas $x^2=2a(y-x\sqrt{3})$ em que a é um parâmetro variável, sabendo que o ângulo entre as curvas e as suas trajectórias é $\omega=60°$.

Resolução — Acha-se a equação diferencial da família de curvas $y'=\frac{2y}{x}-\sqrt{3}$ e substitue-se y' pela expressão $q=\frac{y'-\operatorname{tg}\omega}{1+y'\operatorname{tg}\omega}$.

Se $\omega=60°$, tem-se $q=\frac{y'-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\,y'}$ e obtém-se a equação diferencial $\frac{y'-\sqrt{3}}{1+y'\sqrt{3}}=\frac{2y}{x}-\sqrt{3}$.

O integral geral $y^2=C\left(x-y\sqrt{3}\right)$ dá a família das trajectórias procuradas.

111. Achar as trajectórias isogonais da família de parábolas $y^2=4Cx$, sabendo que $\omega=45°$. Resp. $y^2-xy+2x^2=Ce^{\frac{6}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2y-x}{x\sqrt{7}}}$.

112. Achar as trajectórias isogonais da família de rectas $y=Cx$ para $\omega=30°, 45°$.

Resp. As espirais logarítmicas $\begin{cases} x^2+y^2=e^{2\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}} \\ x^2+y^2=e^{2\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}} \end{cases}$.

113. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. Eliminar C_1 e C_2. Resp. $y''-y=0$.

114. Escrever a equação diferencial de todos os círculos dum plano. Resp. $(1+y'^2)\,y'''-3y'y''^2=0$.

115 Escrever a equação diferencial de todas as cónicas com centros, nos eixos principais Ox, Oy. Resp. $x\,(yy''+y'^2)-y'y=0$.

116. Dá-se a equação diferencial $y'''-2y''-y'+2y=0$ e a sua solução geral $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}$.

Pede-se: 1) verificar que a família de curvas dadas é precisamente a solução geral; 2) encontrar a solução particular correspondente a $x=0$; $y=1$; $y'=0$, $y''=-1$. Resp. $y=\frac{1}{6}(9e^x+e^{-x}-4e^{2x})$.

117. Dá-se a equação diferencial $y''=\frac{1}{2y'}$ e a sua solução geral $y=\pm\frac{2}{3}(x+C_1)^{3/2}+C_2$.

1) Verificar que a família de curvas dadas é precisamente o integral geral.
2) Achar a curva integral que passa pelo ponto (1, 2) e cuja tangente neste ponto forma com o eixo positivo Ox um ângulo de 45°.

Resp. $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{4}{3}$.

Integrar as seguintes equações diferenciais simples, reduzindo-as a equações de primeira ordem:

118. $xy''' = 2$. Resp. $y = x^2 \operatorname{Log} x + C_1x^2 + C_2x + C_3$; dar a solução particular que satisfaz às condições iniciais: $x = 1$, $y = 1$, $y' = 1$, $y'' = 3$.

119. $y^{(n)} = x^m$. Resp. $y = \frac{m!\, x^{m+n}}{(m+n)!} + C_1x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$.

120. $y'' = a^2y$. Resp. $ax = \operatorname{Log}\left(ay + \sqrt{a^2y^2 + C_1}\right) + C_2$ ou $y = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax}$.

121. $y'' = \frac{a}{y^3}$. Resp. $(C_1x + C_2)^2 = C_1y^2 - a$.

Nos exemplos 122-125, escrever a solução particular que satisfaz às condições iniciais: $x = 0$, $y = -1$, $y' = 0$.

122. $xy'' - y' = x^2e^x$. Resp. $y = e^x(x-1) + C_1x^2 + C_2$. Solução particular: $y = e^x(x-1)$.

123. $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$. Resp. $y + C_1 \operatorname{Log} y = x + C_2$. Solução particular: $y = -1$.

124. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} 2x$. Resp. $y = C_2 + C_1 \operatorname{sen} x - x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$. Soluções particulares: $y = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x - x - 1$.

125. $(y'')^2 + (y')^2 = a^2$. Resp. $y = C_2 - a\cos(x + C_1)$. Solutions particulières: $y = a - 1 - a\cos x$; $y = a\cos x - (a+1)$. (**Indicação** — Forma paramétrica $y'' = a\cos t$, $y' = a \operatorname{sen} t$.)

126. $y'' = \frac{1}{2y'}$. Resp. $y = \pm\frac{2}{3}(x + C_1)^{3/2} + C_2$.

127. $y''' = y''^2$. Resp. $y = (C_1 - x)\left[\operatorname{Log}(C_1 - x) - 1\right] + C_2x + C_3$.

128. $y'y''' - 3y''^2 = 0$. Resp. $x = C_1y^2 + C_2y + C_3$.

Integrar as equações lineares diferenciais seguintes de coeficientes constantes:

129. $y'' = 9y$. Resp. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$.

130. $y'' + y = 0$. Resp. $y = A\cos x + B \operatorname{sen} x$.

131. $y'' - y' = 0$. Resp. $y = C_1 + C_2e^x$.

132. $y'' + 12y = 7y'$. Resp. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}$.

133. $y'' - 4y' + 4y = 0$. Resp. $y = (C_1 + C_2x)\,e^{2x}$.

134. $y'' + 2y' + 10y = 0$. Resp. $y = e^{-x}(A\cos 3x + B \operatorname{sen} 3x)$.

135. $y'' + 3y' - 2y = 0$. Resp. $y = C_1e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}x} + C_2e^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}x}$

136. $4y'' - 12y' + 9y = 0$. Resp. $y = (C_1 + C_2x)\,e^{3/2x}$.

137. $y'' + y' + y = 0$. Resp. $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$

138. Duas massas idênticas estão suspensas numa mola em espiral. Suponha-se que uma das massas se destaca e se pede para encontrar o movimento da outra.

Resp. $x = a\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,t\right)$, em que a é o alongamento da mola sob a acção duma só massa em repouso.

139. Um ponto material de massa m é solicitado por dois centros, sendo as forças proporcionais à distância. O factor de proporcionalidade é k. A distância entre os dois centros é $2c$. O corpo encontra-se no instante inicial sobre a linha dos centros à distância a do meio. A velocidade inicial é nula. Achar a lei do movimento do ponto. Resp. $x = a\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)$.

140. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$. Resp. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$.

141. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$. Resp. $y = C_1e^{2x} + C_2e^x + C_3e^{-x}$.

142. $y'''' - 3ay'' + 3a^2y' - a^3y = 0$. Resp. $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)\,e^{ax}$.

143. $y^V - 4y''' = 0$. Resp. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{2x} + C_5e^{-2x}$.

144. $y^{IV} + 2y'' + 9y = 0$. Resp. $y = (C_1\cos\sqrt{2x} + C_2\,\mathrm{sen}\sqrt{2x})\,e^{-x} + (C_3\cos\sqrt{2x} + C_4\,\mathrm{sen}\sqrt{2x})\,e^x$.

145. $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$. Resp. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3xe^{2x} + C_4xe^{-2x}$.

146. $y^{IV} + y = 0$. Resp. $y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_4\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

147. $y^{IV} - a^4y = 0$. Encontrar a solução geral e pôr em evidência a solução particular que satisfaz às condições iniciais: $x_0 = 0$, $y = 1$, $y' = 0$, $y'' = -a^2$, $y''' = 0$. Resp. Solução geral: $y = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax} + C_3\cos ax + C_3$ Solução particular: $y_0 = \cos ax$.

Integrar as equações diferencais com segundos membros; achar a solução geral:

148. $y'' - 7y' + 12y = x$. Resp. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + \frac{12x + 7}{144}$.

149. $s'' - a^2s = t + 1$. Resp. $s = C_1e^{at} + C_2e^{-at} - \frac{t + 1}{a_2}$.

150. $y'' + y' - 2y = 8\,\mathrm{sen}\,2x$. Resp. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} - \frac{1}{5}(6\,\mathrm{sen}\,2x + 2\cos 2x)$.

151. $y'' - y = 5x + 2$. Resp. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 5x - 2$.

152. $s'' - 2as' + a^2s = e^t$ $(a \neq 1)$. Resp. $s = C_1e^{at} + C_2te^{at} + \frac{e^t}{(a - 1)^2}$.

153. $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$. Resp. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-5x} + \frac{1}{21}e^{2x}$.

154. $y'' + 9y = 6e^{3x}$. Resp. $y = C_1\cos 3x + C_2\,\mathrm{sen}\,3x + \frac{1}{3}e^{3x}$.

155. $y'' - 3y' = 2 - 6x$. Resp. $y = C_1 + C_2e^{3x} + x^2$.

156. $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$. Resp. $y = e^x(A\cos\sqrt{2}\,x + B\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}\,x) + \frac{e^{-x}}{41}(5\cos x - 4\,\mathrm{sen}\,x)$.

157. $y'' + 4y = 2\,\mathrm{sen}\,2x$. Resp. $y = A\,\mathrm{sen}\,2x + B\cos 2x - \frac{x}{2}\cos 2x$.

158. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$. Resp. $y = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 e^{2x} - x - 4$.

159. $y^{IV} - a^4 y = 5a^4 e^{ax} \operatorname{sen} ax$. Resp. $y = (C_1 - \operatorname{sen} ax) e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \cos ax + C_4 \operatorname{sen} ax$.

160. $y^{IV} + 2a^2 y'' + a^4 y = 8 \cos ax$. Resp. $y = (C_1 + C_2 x) \cos ax + (C_3 + C_4 x) \times \operatorname{sen} ax - \frac{x^2}{a^2} \cos ax$.

161. Determinar a curva integral da equação $y'' + k^2 y = 0$ que passa pelo ponto $M(x_0, y_0)$ e tangente neste ponto à recta $y = ax$. Resp. $y = y_0 \cos k(x - x_0) + \frac{a}{k} \operatorname{sen} k(x - x_0)$.

162. Achar a solução da equação $y'' + 2hy' + n^2 y = 0$, que satisfaz às condições $y = a$, $y' = C$ para $x = 0$. Resp. Si $h < n$,

$$y = e^{-hx}\left(a \cos \sqrt{n^2 - h^2}\,x + \frac{C + ah}{\sqrt{n^2 - h^2}} \operatorname{sen} \sqrt{n^2 - h^2}\,x\right);$$

si $h = n$, $y = e^{-hx}[(C + ah)x + a]$; si $h > n$,

$$y = \frac{C + a(h + \sqrt{h^2 - n^2})}{2\sqrt{h^2 - n^2}} e^{-(h - \sqrt{h^2 - n^2})x} - \frac{C + a(h - \sqrt{h^2 - n^2})}{2\sqrt{h^2 - n^2}} e^{-(h + \sqrt{h^2 - n^2})x}.$$

163. Achar a solução da equação $y'' + n^2 y = h \operatorname{sen} px \ (p \neq n)$, que satisfaça às condições: $y = a$, $y' = C$ quando $x = 0$.

$$\text{Resp. } y = a \cos nx + \frac{C(n^2 - p^2) - hp}{n(n^2 - p^2)} \operatorname{sen} nx + \frac{h}{n^2 - p^2} \sin px.$$

164. Um peso de 4 kg ligado a uma mola distende-a de 1 cm. Achar a lei do movimento, sabendo que a extremidade superior efectua oscilações harmónicas $y = \operatorname{sen} \sqrt{100g}\,t$, sendo y a distensão vertical.

Resolução — Seja x a coordenada vertical do peso contado a partir da posição de repouso. Tem-se:

$$\frac{4}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - y - l),$$

em que l é o comprimento da mola distendidade e $k = 400$, como resulta das condições iniciais. Deduz-se $\frac{d^2x}{dt^2} + 100\,g\,x = 100\,g \operatorname{sen} \sqrt{100g}\,t + 100\,lg$. Procurar-se-á um integral particular desta equação sob a forma

$$t(C_1 \cos \sqrt{100g}\,t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{100g}\,t) + g,$$

dado que o primeiro termo do segundo membro da equação entra na solução da equação homogénea.

165. No problema 139, a velocidade inicial é igual a v_0 e está dirigida perpendicularmente à recta dos centros. Encontrar a trajectória.

Resolução — Tomemos a origem das coordenadas no meio do segmento t ligando os dois centros: as equações diferencais do movimento escrevem-se:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = k(C - x) - k(C + x) = -2kx, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -2ky.$$

Condições iniciais no instante $t = 0$:

$$x = a\,; \quad \frac{dx}{dt} = 0\,; \quad y = 0\,; \quad \frac{dy}{dt} = v_0.$$

Encontra-se, integrando:

$$x = a \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\, t\right), \quad y = v_0 \sqrt{\frac{m}{2k}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\, t\right)$$

donde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 2k}{m v_0^2} = 1 \text{ (elipse).}$$

166. Um tubo horizontal gira em torno dum eixo vertical com uma velocidade angular constante ω. Uma esfera desliza no tubo sem atrito. Achar a lei do movimento da esfera, sabendo que no instante inicial se encontra sobre o eixo de rotação e a sua velocidade inicial é v_0 (segundo o eixo do tubo).

Indicação — A equação diferencial do movimento é $\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r$. Condições iniciais: $r = 0$, $\frac{dr}{dt} = v_0$ quando $t = 0$.

integrando-se, obtém-se: $r = \frac{v_0}{2\omega}\,[e^{\omega t} + e^{-\omega t}]$.

Aplicar o método da variação das constantes na integração das seguintes equações diferenciais:

167. $y'' - 7y' + 6y = \operatorname{sen} x$. **Resp.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + \frac{5 \operatorname{sen} x + 7 \cos x}{74}$.

168. $y'' + y = \sec x$. **Resp.** $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x + \cos x \operatorname{Log} \cos x$.

169. $y'' + y = \frac{1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}$. **Resp.** $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - \sqrt{\cos 2x}$.

Integrar as seguintes equações diferenciais de tipos diversos:

170. $yy'' = y'^2 + 1$. **Resp.** $y = \frac{1}{2C_1}\,[e^{C_1(x - C_2)} + e^{-C_1(x - C_2)}]$.

171. $\frac{x^2\, dy - y^2\, dx}{(x - y)^2} = 0$. **Resp.** $\frac{xy}{x - y} = C$.

172. $y = xy'^2 + y'^2$. **Resp.** $y = (\sqrt{x + 1} + C)^2$.
Soluções singulares: $y = 0\,;\; x + 1 = 0$.

173. $y'' + y = \sec x$. **Resp.** $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x + \cos x \operatorname{Log} \cos x$.

174. $(1 + x^2)\, y' - xy - a = 0$. **Resp.** $y = ax + C\sqrt{1 + x^2}$.

175. $x \cos \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = y \cos \frac{y}{x} - x$. **Resp.** $x e^{\operatorname{sen} \frac{y}{x}} = C$.

176. $y'' - 4y = e^{2x} \operatorname{sen} 2x$. **Resp.** $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - \frac{e^{2x}}{20}(\operatorname{sen} 2x + 2 \cos 2x)$.

177. $xy' + y - y^2 \operatorname{Log} x = 0$. **Resp.** $(\operatorname{Log} x + 1 + Cx)\, y = 1$.

178. $(2x + 2y - 1)\, dx + (x + y - 2)\, dy = 0$. **Resp.** $2x + y - 3 \operatorname{Log}(x + y + 1) = C$.

179. $3e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1 - e^x) \sec^2 y\, dy = 0$. **Resp.** $\operatorname{tg} y = C(1 - e^x)^3$.

Integrar os sistemas de equações diferenciais:

180. $\frac{dx}{dt}=y+1$, $\frac{dy}{dt}=x+1$. Indicar a solução particular que satisfaça às condições iniciais $x=-2$, $y=0$ para $t=0$. Resp. $y=C_1\cos t+C_2\,\text{sen}\,t$, $x=(C_1+C_2)\cos t+(C_2-C_1)\,\text{sen}\,t$. *Solução particular* $x^*=\cos t-\text{sen}\,t$, $y^*=\cos t$.

181. $\frac{dx}{dt}=x-2y$, $\frac{dy}{dt}=x-y$. Indicar a solução particular correspondente às condições iniciais $x=1$ $y=1$ para $t=0$. Resp. $y=C_1\cos t+C_2\,\text{sen}\,t$, $x=(C_1+C_2)\cos t+(C_2-C_1)\,\text{sen}\,t$. Solução particular: $y^*=\cos t-\text{sen}\,t$, $y^*=\cos t$.

182. $\begin{cases} 4\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}+3x=\text{sen}\,t, \\ \frac{dx}{dt}+y=\cos t. \end{cases}$ Resp. $x=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}$, $y=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}+\cos t$.

183. $\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2}=x, \\ \frac{d^2x}{dt^2}=y. \end{cases}$ Resp. $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\,\text{sen}\,t$, $y=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\,\text{sen}\,t$.

184. $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+x=e^t, \\ \frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}=1. \end{cases}$ Resp. $x=C_1+C_2t+C_3t^2-\frac{1}{6}t^3+e^t$,

$$y=C_4-(C_1+2C_3)\,t-\frac{1}{2}(C_2-1)\,t^2-\frac{1}{3}C_3t^3+\frac{1}{24}t^4-e^t.$$

185. $\begin{cases} \frac{dy}{dx}=z-y, \\ \frac{dz}{dx}=-y-3z. \end{cases}$ Resp. $y=(C_1+C_2x)\,e^{-2x}$, $z=(C_2-C_1-C_2x)\,e^{-2x}$.

186. $\begin{cases} \frac{dy}{dx}+z=0, \\ \frac{dz}{dx}+4y=0. \end{cases}$ Resp. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$, $z=-2\,(C_1e^{2x}-C_2e^{-2x})$.

187. $\begin{cases} \frac{dy}{dx}+2y+z=\text{sen}\,x, \\ \frac{dz}{dx}-4y-2z=\cos x. \end{cases}$ Resp. $y=C_1+C_2x+2\,\text{sen}\,x$, $z=-2C_1-C_2(2x+1)-3\,\text{sen}\,x-2\cos x$.

188. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=y+z, \\ \frac{dy}{dt}=x+z, \\ \frac{dz}{dt}=x+y. \end{cases}$ Resp. $x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}$, $y=C_3e^{-t}+C_2e^{2t}$, $z=-(C_1+C_3)\,e^{-t}+C_2e^{2t}$.

189. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{1}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{y-x}. \end{cases}$ Resp. $z = C_2 e^{C_1^x}$, $y = x + \dfrac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1^x}$

190. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{yz}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{x}{y^2}. \end{cases}$ Resp. $\dfrac{z}{y} = C_1$, $zy^2 - \dfrac{3}{2} x^2 = C_2$.

Estudar a estabilidade da solução x = 0, y = 0 *para os sistemas de equação diferencais seguintes:*

191. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 6y. \end{cases}$ Resp. Instável.

192. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 10y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$ Resp. Estável.

193. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 12x + 18y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 12y. \end{cases}$ Resp. Instável.

194. Achar os valores aproximados das soluções da equação $y' = y^2 + x$ que verificam a condição inicial: $y = 1$ para $x = 0$. Encontrar os valores das soluções para os valores $x = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}4$; $0{,}5$. Resp. $y_{x=0{,}5} = 2{,}114$.

195. Achar o valor aproximado $y_{x=1{,}4}$ da solução da equação $y' + \dfrac{1}{x} y = e^x$ que verifica as condições iniciais: $y = 1$ para $x = 1$. Comparar o resultado obtido com a solução exacta.

196. Achar os valores aproximados $x_{t=1{,}4}$ e $y_{t=1{,}4}$ das soluções do sistema de equações $\dfrac{dx}{dt} = y - x$, $\dfrac{dy}{dt} = -x - 3y$ que verificam as condições iniciais: $x = 0$, $y = 1$ para $t = 1$. Comparar os resultados obtidos com os valores exactos.

Capítulo XIV

INTEGRAIS MÚLTIPLOS

§ 1. Integral duplo

Seja no plano Oxy um domínio fechado (*) D limitado por uma curva L.

Seja dado no domínio D uma função contínua

$$z = f(x, y).$$

Dividamos o domínio D em n domínios parciais por curvas quaisquer:

$$\Delta s_1, \ \Delta s_2, \ \Delta s_3, \ \ldots, \ \Delta s_n$$

(fig. 276). Para não complicar a escrita, designaremos igualmente por $\Delta s_1, \ldots, \Delta s_n$ as áreas destes pequenos domínios. Escolhamos em cada Δs_i um ponto P_i arbitrário (interior ou sobre a fronteira); ter-se-á, pois, n pontos:

$$P_1, \ P_2, \ \ldots, \ P_n.$$

Sejam $f(P_1), f(P_2), \ldots, f(P_n)$ os valores da função nestes pontos: formemos a soma dos produtos $f(P_i)\,\Delta s_i$:

$$V_n = f(P_1)\,\Delta s_1 + f(P_2)\,\Delta s_2 + \ldots + f(P_n)\,\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i \qquad (1)$$

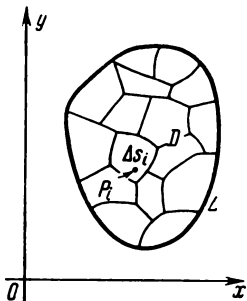



Fig. 276.

que se chama *soma integral* da função $f(x, y)$ no domínio D.

Se $f \geqslant 0$ em D, poder-se-á representar geomètricamente cada termo $f(P_i)\,\Delta s_i$ como o volume do cilindro elementar de base Δs_i e de altura $f(P_i)$.

A soma V_n é a soma dos volumes dos cilindros elementares, isto é, o volume do corpo em «escada» representado na fig. 277.

(*) Um domínio D diz-se fechado se está limitado por uma curva fechada e se se considera que as pontos fronteiros pertencem ao domínio.

Consideremos uma sequência arbitrária de somas integrais formadas pela função $f(x, y)$ no domínio D

$$V_{n_1}, \ V_{n_2}, \ \ldots, \ V_{n_k}, \ \ldots \tag{2}$$

por diversos cortes de D em domínios parciais Δs_i. Supor-se-á que o maior diâmetro dos Δs_i tende para zero quando $n_k \to \infty$.

Tem-se, então, o seguinte teorema que não demonstraremos.

Teorema — 1. *Sendo contínua a função $f(x, y)$ no domínio fechado D, a sequência* (2) *de somas integrais* (1) *tem um limite quando o maior diâmetro dos domínios parciais Δs tende para zero e quando*

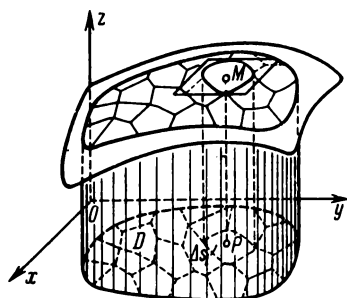



Fig. 277.

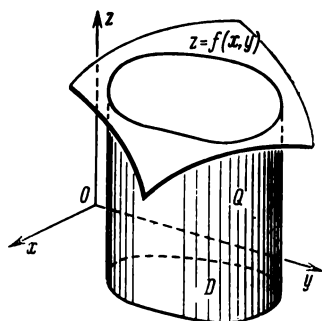



Fig. 278.

$n \to \infty$. Este limite é o mesmo qualquer que seja a sequência (2), *isto é, que não depende nem do modo do corte de D em domínios parciais Δs_i nem da escolha do ponto P_i em Δs_i.*

Este limite chama-se *integral duplo* da função $f(x, y)$ sobre o domínio D e designa-se por

$$\iint\limits_D f(P)\, ds \quad \text{ou} \quad \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy,$$

isto é,

$$\lim_{\text{diam}\, \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\, \Delta s_i = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

D chama-se o *domínio de integração.*

Se $f(x, y) \geqslant 0$, o integral duplo da função $f(x, y)$ sobre o domínio D é igual ao volume Q do corpo limitado pela superfície $z = f(x, y)$, o plano $z = 0$ e a superfície cilindrica cujas geratrizes são paralelas ao eixo Oz e se apoiam sobre a fronteira de D (fig. 278).

Consideremos ainda os teoremas seguintes sobre o integral duplo.

Teorema — 2. *O integral duplo da soma de duas funções* $\varphi(x, y)$ *e* $\psi(x, y)$ *no domínio D é igual à soma dos integrais duplos de cada uma das duas funções consideradas nesse domínio:*

$$\iint_D [\varphi(x, y) + \psi(x, y)]\, ds = \iint_D \varphi(x, y)\, ds + \iint_D \psi(x, y)\, ds.$$

Teorema — 3. *Pode-se separar um factor constante para fora do sinal de integração dupla:*

se $a =$ const., *tem-se*

$$\iint_D a\varphi(x, y)\, ds = a \iint_D \varphi(x, y)\, ds.$$

Demonstram-se estes dois teoremas exactamente como os teoremas correspondentes sobre os integrais definidos (ver tomo I, § 3, cap. XI).

Teorema — 4. *Se o domínio D for constituído por dois domínios* parciais D_1 *e* D_2, *sem ponto interior comum e se* $f(x, y)$ *for contínua em todos os pontos de D, tem-se*

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x, y)\, dx\, dy. \quad (3)$$

Fig. 279

Demonstração — Pode-se representar a soma integral em D sob a forma (fig. 279)

$$\sum_D f(P_i)\, \Delta s_i = \sum_{D_1} f(P_i)\, \Delta s_i + \sum_{D_2} f(P_i)\, \Delta s_i, \quad (4)$$

contendo a primeira soma os termos relativos aos domínios parciais de D_1 e a segunda os termos relativos aos domínios parciais de D_2. Como o integral duplo não depende de modo de corte, cortaremos o domínio D de tal maneira que a fronteira comum de D_1 e D_2 seja também uma fronteira dos domínios parciais Δs_i. Passando a limite a igualdade (4) quando $\Delta s_i \to 0$, obtém-se a igualdade (3). Este teorema subsiste quando D é formado de vários domínios disjuntos ou sem pontos interiores comuns.

§ 2. Cálculo dos integrais duplos

Consideremos um domínio D do plano Oxy tal, que qualquer paralela a um dos eixos coordenados, por exemplo a Oy, e que passa por um ponto interior (*) ao domínio, corte a sua fronteira em dois pontos N_1 e N_2 (fig. 280).

(*) Um ponto interior é um ponto que não se encontra na fronteira.

Suporemos que, no caso considerado, D está limitado pelas curvas $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ e das rectas $x = a$, $x = b$ e que

$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x), \qquad a < b,$$

sendo as funções $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ contínuas sobre o segumento $[a, b]$.

Convencionaremos chamar a este domínio *regular segundo o eixo Oy*. Do mesmo modo se define domínio *regular segundo o eixo Ox*.

Um domínio regular segundo os dois eixos de coordenadas dir-se-á, simplesmente, *domínio regular*. A fig. 280 dá um exemplo de domínio regular.

Suponhamos $f(x, y)$ contínua no domínio D.

Consideremos a expressão

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

que chamaremos *integral duplo* ou *soma dupla* da função $f(x, y)$ sobre D. Nesta expressão, calcula-se em primeiro lugar o integral entre parêntesis, sendo a integração feita em relação a y e sendo x considerado como constante. Acha-se, após integração, uma função contínua (*) de x:

F i g. 280.

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Integremos agora esta função em relação a x entre os limites a e b:

$$I_D = \int_a^b \Phi(x)\, dx.$$

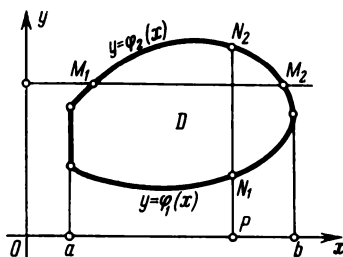
Por fim, encontra-se um número constante.

Exemplo — Calcular o integral duplo

$$I_D = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2 + y^2)\, dy \right) dx.$$

Resolução — Em primeiro lugar, calculemos o integral interno (entre parêntesis):

$$\Phi(x) = \int_0^{x^2} (x^2 + y^2)\, dy = \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)_0^{x^2} = x^2 x^2 + \frac{(x^2)^3}{3} = x^4 + \frac{x^6}{3}.$$

(*) Não demonstraremos a continuidade da função $\Phi(x)$.

Integremos, agora, a função obtida de 0 a 1:

$$\int_0^1 \left(x^4+\frac{x^6}{3}\right)dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{3\cdot 7}\right)_0^1=\frac{1}{5}+\frac{1}{21}=\frac{26}{105}.$$

O domínio de integração D é o domínio limitado pelas curvas (fig. 281)

$$y=0, \quad x=0, \quad y=x^2, \quad x=1.$$

Sucede que o domínio D é tal que uma função $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ não pode ser dada por uma única expressão analítica em todo o

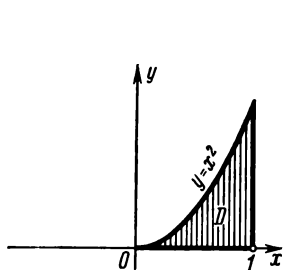



Fig. 281

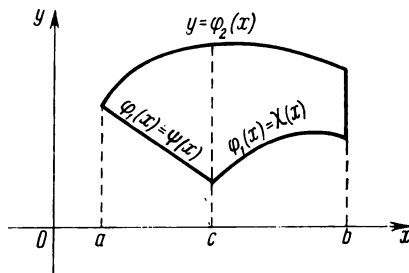



Fig. 282

intervalo de variação de x (de $x=a$ a $x=b$). Seja, por exemplo, $a<c<b$ e

$$\varphi_1(x)=\psi(x) \text{ sobre o segmento } [a, c],$$
$$\varphi_1(x)=\chi(x) \text{ sobre o segmento } [c, b],$$

sendo $\psi(x)$ e $\chi(x)$ funções dadas analiticamente (fig. 282).

Escrever-se-á, então, o integral duplo como se segue:

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right)dx=$$
$$=\int_a^c \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right)dx+\int_c^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right)dx=$$
$$=\int_a^c \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right)dx+\int_c^b \left(\int_{\chi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right)dx.$$

Escreve-se a primeira igualdade em virtude da conhecida propriedade dos integrais definidos e a segunda porque se tem $\varphi_1(x)=\psi(x)$ sobre o segmento $[a, c]$ e $\varphi_1(x)=\chi(x)$ sobre $[c, b]$.

Uma transcrição análoga para o integral duplo tem lugar quando a função $\varphi_2(x)$ se decompõe em diferentes expressões analíticas sobre o segmento $[a, b]$.

Estabeleçamos algumas propriedades dos integrais duplos.

Propriedade — 1. *Se se divide um domínio D regular segundo Oy em dois domínios D_1 e D_2 por uma paralela ao eixo Oy ou ao eixo Ox, o integral duplo I_D sobre D é igual à soma dos integrais análogos* sobre D_1 e D_2:

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}. \tag{1}$$

Demonstração — a) Suponhamos que a recta $x = c$ $(a < c < b)$ divide o domínio D em dois domínios regulares segundo Oy (*) D_1 e D_2. Então,

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b \Phi(x)\, dx =$$

$$= \int_a^c \Phi(x)\, dx + \int_c^b \Phi(x)\, dx =$$

$$= \int_a^c \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx +$$

$$+ \int_c^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

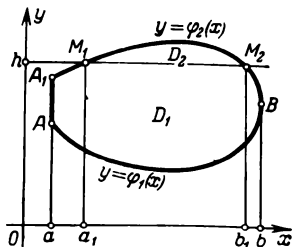



Fig. 283.

b) Suponhamos que a recta $y = h$ divide o domínio D em dois domínios regulares segundo Oy D_1 e D_2 como a figura 283.

Designemos por M_1 e M_2 os pontos de intersecção da recta $y = h$ com a fronteira L de D. Designemos as abcissas desses pontos por a_1 e b_2.

O domínio D é limitado por curvas contínuas:

1. $y = \varphi_1(x)$;
2. a curva $A_1M_1M_2B$ de que escrevemos convencionalmente a equação sob a forma

$$y = \varphi_1^*(x),$$

tendo em vista que $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$ quando $a \leqslant x \leqslant a_1$ e $b_1 \leqslant x \leqslant b$ e que

$$\varphi_1^*(x) = h \text{ quando } a_1 \leqslant x \leqslant b_1;$$

3. as rectas $x = a$, $x = b$.

O domínio D_2 é limitado pelas curvas

$$y = \varphi_1^*(x), \quad y = \varphi_2(x), \text{ em que } a_1 \leqslant x \leqslant b_1.$$

(*) O facto de uma parte da fronteira do domínio D ser um segmento vertical não impede que este domínio seja regular segundo Oy; porque se exigia para esse efeito que qualquer vertical que passe por um ponto interior do domínio não cortasse a fronteira em mais de dois pontos.

Escrevamos a identidade seguinte aplicando ao integral interior o teorema sobre a decomposição do intervalo de integração:

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,\ y)\, dy + \int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,\ y)\, dy \right) dx + \int_a^b \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\, dy \right) dx.$$

Decomponhamos o último integral em três integrais aplicando o mesmo teorema integral exterior:

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\, dy \right) dx = \int_a^{a_1} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\, dy \right) dx +$$

$$+ \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\, dy \right) dx + \int_{b_1}^{b} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\, dy \right) dx;$$

Como $\varphi_1^*(x) = \varphi_2(x)$ no segmento $[a,\ b]$ e no segmento $[b_1,\ b]$ o primeiro e o terceiro integral são idênticamente nulos. Por conseguinte

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,\ y)\, dy \right) dx + \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\, dy \right) dx.$$

O primeiro termo é aqui um integral duplo estendido a D_1 e o segundo, um integral estendido a D_2. Por conseguinte,

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

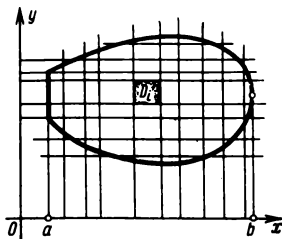
A demonstração é análoga qualquer que seja a secante M_1M_2. Se a recta M_1M_2 divide D em três domínios ou mais, obtém-se uma relação análoga a (1) com um número correspondente de termos no segundo membro.

Corolário — Pode-se dividir cada um dos domínios regulares segundo Oy por uma paralela a Oy ou Ox e aplicar-lhe a propriedade (1). Por conseguinte, pode-se dividir o domínio D por paralelas aos eixos coordenados num número arbitrário de domínios parciais regulares:

$$D_1,\ D_2,\ D_3,\ \ldots,\ D_i,$$

e poder-se-á, sempre, afirmar que o integral duplo alargado ao domínio D é igual à soma dos integrais duplos alargados aos domínios parciais (fig. 284)

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2} + I_{D_3} + \ldots + I_{D_i}. \tag{2}$$

Propriedade — 2. (Avaliação dos integrais duplos). *Sejam m e M*

F i g. 284.

o mínimo e máximo valor da função $f(x, y)$ do domínio D. Seja S a área de D. Tem-se a desigualdade

$$mS \leqslant \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx \leqslant MS. \tag{3}$$

Demonstração — Calculemos o integral interior que designaremos por $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \leqslant \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} M\, dy = M[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)].$$

Tem-se:

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx \leqslant \int_a^b M[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\, dx = MS,$$

isto é,

$$I_D \leqslant MS. \tag{3'}$$

Duma maneira análoga

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \geqslant \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} m\, dx = m[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)],$$

$$I_D = \int_a^b \Phi(x)\, dx \geqslant \int_a^b m[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\, dx = mS,$$

isto é, que

$$I_D \geqslant mS. \tag{3''}$$

A desigualdade (3) resulta das desigualdades (3') e (3''):

$$mS \leqslant I_D \leqslant MS.$$

Interpretaremos geomètricamente este teorema no parágrafo seguinte.

Propriedade — 3. (Teorema da média). *O integral duplo I_D duma função contínua $f(x, y)$ é igual ao produto de S pelo valor da função num certo ponto P do domínio D:*

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = f(P)\, S. \tag{4}$$

Demonstração — Deduz-se de (3):

$$m \leqslant \frac{1}{S} I_D \leqslant M.$$

O número $\frac{1}{S} I_D$ está compreendido entre o maior e o menor valor da função $f(x, y)$ no domínio D. Em virtude da continuidade de $f(x, y)$ em D, ela toma num certo ponto P do domínio D o valor $\frac{1}{S} I_D$, isto é, que

$$\frac{1}{S} I_D = f(P),$$

donde

$$I_D = f(P)\, S. \tag{5}$$

§ 3. Cálculo dos integrais duplos (*continuação*)

Teorema — *O integral duplo duma função contínua $f(x, y)$ estendido ao domínio regular D tem por expressão* (*)

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

(*) Supõe-se, de novo, que o domínio é regular segundo Oy e limitado pelas curvas $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$.

Demonstração — Cortemos o domínio D por paralelas aos eixos coordenados em n domínios regulares (rectangulares):

$$\Delta s_1, \ \Delta s_2, \ \ldots, \ \Delta s_n.$$

Tem-se, em virtude da propriedade 1 [fórmula (2)] do parágrafo anterior,

$$I_D = I_{\Delta s_1} + I\Delta_{s_2} + \ldots + I\Delta_{s_n} = \sum_{i=1}^{n} I\Delta_{s_i}. \qquad (1)$$

Transformemos cada termo da direita pela aplicação do teorema da média sobre os integrais duplos

$$I\Delta_{s_i} = f(P_i)\,\Delta s_i.$$

A igualdade (1) transforma-se em

$$I_D = f(P_1)\,\Delta s_1 + f(P_2)\,\Delta s_2 + \ldots + f(P_n)\,\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i, \qquad (2)$$

onde P_i é um ponto em Δs_i. Tem-se à direita uma soma integral para a função $f(x, y)$ sobre D. Segundo o teorema da existência dos integrais duplos, resulta que o limite desta soma, quando $n \to \infty$ e que o maior diâmetro dos domínios parciais Δs_i tende para zero, existe e é igual ao integral duplo da função $f(x, y)$ sobre D. O valor numérico de I_D do primeiro membro da igualdade (2), resultante de duas integrações simples sucessivas, não depende de n. Passando a limite em (2), obtém-se

$$I_D = \lim_{\operatorname{diam} \Delta s_i \to 0} \sum f(P_i)\,\Delta s_i = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy$$

ou

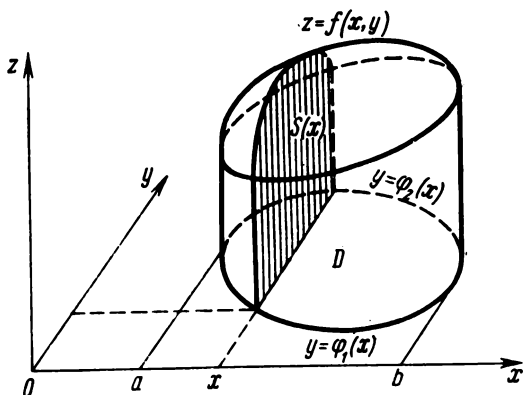
$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = I_D. \qquad (3)$$

Por fim, obtém-se:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx. \qquad (4)$$

Nota — 1. Quando $f(x, y) \geqslant 0$, a fórmula (4) admite uma interpretação geométrica simples. Consideremos o corpo delimitado pela superfície $z = f(x, y)$, o plano $z = 0$ e a superfície cilíndrica cujas geratrizes são paralelas a Oz e se apoiam sobre a fronteira do domínio D (fig. 285). Calculemos o volume V deste corpo. Indicamos acima que o volume deste corpo era igual ao integral duplo de $f(x, y)$ sobre D:

$$V = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (5)$$

Calculemos agora o volume deste corpo utilizando os resultados do § 4, cap. XII, tomo I, sobre o cálculo do volume dum corpo em função das áreas de secções paralelas. Tracemos o plano secante $x =$ const. $(a < c < b)$. Calculemos a área $S(x)$ da figura obtida no

F i g. 285.

plano $x =$ const. Esta figura é o trapézio curvilíneo delimitado pelas curvas $z = f(x, y)$ $(x = \text{const.})$, $z = 0$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$. Por conseguinte, esta área, exprime-se pelo integral

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \qquad (6)$$

Conhecendo as áreas das secções paralelas, encontra-se fàcilmente o volume

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

ou, substituindo a expressão (6), pela área $S(x)$, encontra-se:

$$V = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx. \qquad (7)$$

Os primeiros membros da fórmula (5) e (7) são iguais e, portanto, o mesmo se diga dos segundos membros

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx.$$

Agora não é difícil dar o sentido geométrico do teorema sobre a avaliação dos integrais duplos (propriedade 2 do parágrafo anterior): o volume V do corpo delimitado pela superfície $z = f(x, y)$, o plano $z = 0$ e a superfície cilíndrica que tem por directriz a fronteira do domínio D é superior ao volume do cilindro de base S e de altura m, mas inferior ao cilindro de base S e de altura M (sendo m e M o

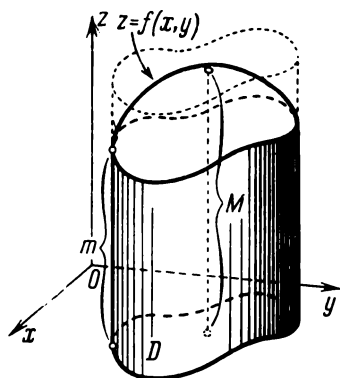



Fig. 286.

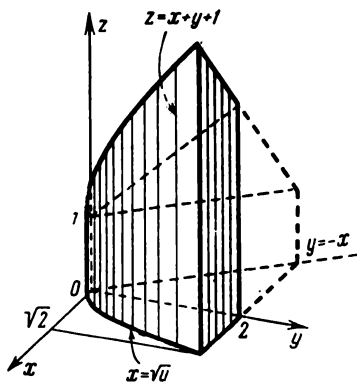



Fig. 287.

menor e o maior valor da função $z = f(x, y)$ no domínio D (fig. 286).

Isto resulta do facto de o integral duplo I_D ser igual ao volume V deste corpo.

Exemplo — 1. Calcular o integral duplo

$$\iint_D (4 - x^2 - y^2)\, dx\, dy,$$

sabendo que o domínio D está limitado pelas rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = \frac{3}{2}$.

Resolução.

$$V = \int_0^{3/2} \left[\int_0^1 (4 - x^2 - y^2)\, dx \right] dy = \int_0^{3/2} \left[4x - y^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 dy =$$

$$= \int_0^{3/2} \left(4 - y^2 - \frac{1}{3} \right) dy = \left(4y - \frac{y^3}{3} - \frac{1}{3} y \right) \Bigg|_0^{3/2} = \frac{35}{8}.$$

Exemplo — 2. Calcular o integral duplo da função $f(x, y) = 1 + x + y$ sobre o domínio limitado pelas curvas $y = -x$, $x = \sqrt{y}$, $y = 2$, $z = 0$ (fig. 287).

Resolução.

$$V=\int_0^2\left[\int_{-y}^{\sqrt{y}}(1+x+y)\,dx\right]dy=\int_0^2\left[x+xy+\frac{x^2}{2}\right]_{-y}^{\sqrt{y}}dy=$$

$$=\int_0^2\left[\left(\sqrt{y}+y\sqrt{y}+\frac{y}{2}\right)-\left(-y-y^2+\frac{y^2}{2}\right)\right]dy=$$

$$=\int_0^2\left[\sqrt{y}+\frac{3y}{2}+y\sqrt{y}+\frac{y^2}{2}\right]dy=\left[\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{3y^2}{4}+\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{y^3}{6}\right]_0^2=\frac{44}{15}\sqrt{2}+\frac{13}{3}$$

Nota — 2. Suponhamos um domínio D regular segundo Ox delimitado pelas curvas

$$x=\psi_1(y),\quad x=\psi_2(y),\quad y=c,\quad y=d,$$

com $\psi_1(y)\leqslant\psi_2(y)$ (fig. 288).

Tem-se, então, evidentemente

$$\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,\ y)\,dx\right)dy. \tag{8}$$

Para calcular um integral duplo, aplicar-se-á, segundo o caso, a fórmula (4) ou a fórmula (8). A escolha é indicada pela forma do domínio D ou da função a integrar.

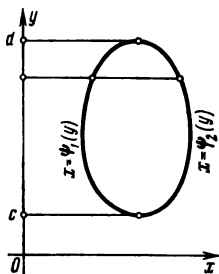



Fig. 288

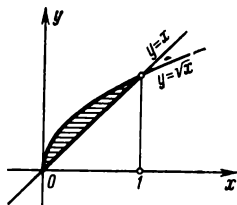



Fig. 289

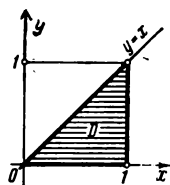



Fig. 290

Exemplo — 3. Inverter a ordem de integração em

$$I=\int_0^1\left(\int_x^{\sqrt{x}}f(x,\ y)\,dy\right)dx.$$

Resolução — O domínio de integração é limitado pela recta $y=x$ e pela parábola $y=\sqrt{x}$ (fig. 289).

Qualquer recta paralela ao eixo dos x corta a fronteira do domínio em dois pontos ou mais; poder-se-á, pois, aplicar a fórmula (8); fazendo

$$\psi_1(y)=y^2,\qquad \psi_2(y)=y,\qquad 0\leqslant y\leqslant 1\ ;$$

tem-se

$$I=\int_0^1\left(\int_{y^2}^{y} f(x, y)\,dx\right)dy.$$

Exemplo — 4. Calcular

$$\iint_D e^{\frac{y}{x}}$$

sabendo que o domínio D é o triângulo limitado pelas rectas $y = x$, $y = 0$, $x = 1$ (fig. 290).

Resolução — Apliquemos as fórmulas (4). (Se se aplicasse a fórmula (8), ser-nos-ia preciso integrar a função $e^{\frac{y}{x}}$ em relação a x; mas este último integral não é integrável por meio de funções elementares):

$$\iint_D e^{\frac{y}{x}}\,ds=\int_0^1\left(\int_0^x e^{\frac{y}{x}}\,dy\right)dx=\int_0^1\left(xe^{\frac{y}{x}}\right)_0^x dx=$$

$$=\int_0^1 x(e-1)\,dx=(e-1)\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{e-1}{2}=0{,}859\ldots$$

Nota — 3. Se o domínio D não for regular nem segundo Ox nem segundo Oy (isto é, se existirem verticais e horizontais que passem

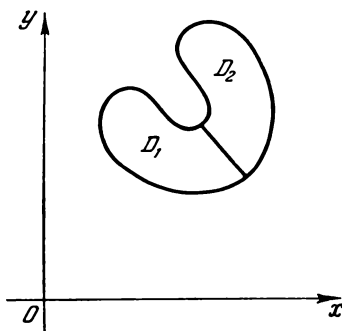



Fig. 291.

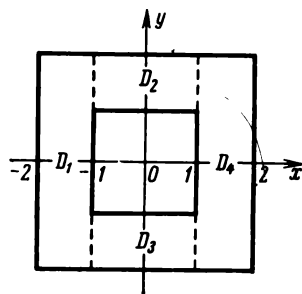



Fig. 292.

pelos pontos interiores do domínio e que cortem a fronteira do domínio em mais de dois pontos), não se pode, então, integrar sem precaução. Se se chega a cortar o domínio irregular D em um número finito de domínios regulares segundo Ox ou Oy. D_1 D_2, ..., D_n, integrar-se-á em cada domínio parcial e far-se-á a soma dos resultados obtidos.

Na figura 291, tem-se um corte dum domínio irregular D em dois domínios regulares D_1 e D_2.

Exemplo — 5. Calcular o integral duplo

$$\iint_D e^{x+y}\, ds$$

em referência ao domínio D compreendido entre dois quadrados centrados na origem e cujos lados são paralelos aos eixos coordenados sabendo que os lados são, respectivamente, iguais a 2 e a 4 (fig. 292).

Resolução — O domínio D é irregular. Corta-se em quatro domínios regulares D_1, D_2, D_3, D_4 pelas rectas $x = -1$ e $x = 1$. Tem-se, pois,

$$\iint_D e^{x+y}\, ds = \iint_{D_1} e^{x+y}\, ds + \iint_{D_2} e^{x+y}\, ds + \iint_{D_3} e^{x+y}\, ds + \iint_{D_4} e^{x+y}\, ds.$$

Tem-se, sucessivamente,

$$\iint_D e^{x+y} \cdot ds = \int_{-2}^{-1} \left(\int_{-2}^{2} e^{x+y}\, dy\right) dx + \int_{-1}^{1} \left(\int_{1}^{2} e^{x+y}\, dy\right) dx +$$

$$+ \int_{-1}^{1} \left(\int_{-2}^{-1} e^{x+y}\, dy\right) dx + \int_{1}^{2} \left(\int_{-2}^{2} e^{x+y}\, dy\right) dx =$$

$$= (e^2 - e^{-2})\,(e^{-1} - e^{-2}) + (e^2 - e)\,(e - e^{-1}) + (e^{-1} - e^{-2})\,(e - e^{-1}) +$$

$$+ (e^2 - e^{-2})\,(e^2 - e) = (e^3 - e^{-3})\,(e - e^{-1}) = 4 \operatorname{sh} 3 \operatorname{sh} 1.$$

Nota — 4. No seguimento, omitiremos os parêntesis no integral duplo,

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\, dy \right) dx,$$

e escreveremos, simplesmente:

$$I_D = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\, dy\, dx,$$

sendo a integração feita pela ordem como são escritos os diferenciais das coordenadas (*).

§ 4. Aplicação dos integrais duplos ao cálculo de áreas e volumes

1. *Volumes* — Vimos no § 1 que o volume V dum corpo limitado por uma superfície $z = f(x,\ y)$, onde $f(x,\ y)$ é uma função não negativa, o plano $z = 0$ e a superfície cilíndrica de geratrizes paralelas a Oz e cuja directriz é a fronteira de D, é igual ao integral duplo de $f(x,\ y)$ sobre D:

$$V = \iint_D f(x,\ y)\, ds.$$

(*) É por vezes cómodo escrever

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,\ y)\, dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,\ y)\, dy.$$

Exemplo — Calcular o volume do corpo limitado pelas superfícies $x = 0$, $y = 0$, $x + y + z = 1$, $z = 0$ (fig. 293).

Resolução.

$$V = \iint_D (1 - x - y)\, dy\, dx,$$

em que D é o domínio triangular do plano Oxy limitado pelas rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$; é o domínio tracejado da figura 293. Tem-se:

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[(1 - x)\, y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - x)^2\, dx = \frac{1}{6}.$$

Tem-se, pois, $V = \frac{1}{6}$ da unidade de volume.

Nota — 1. Se o corpo de que se procura o volume é limitado superiormente pela superfície $z = \Phi_2(x, y) \geqslant 0$ e inferiormente pela superfície $z = \Phi_1(x, y) \geqslant 0$, sendo a projecção destas duas superfícies

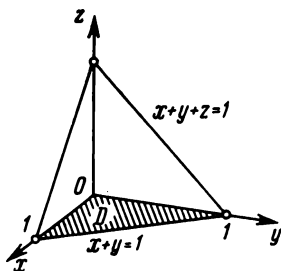



Fig. 293.

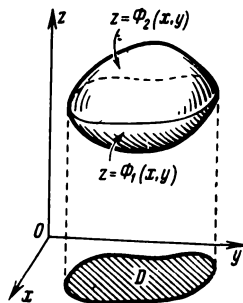



Fig. 294.

sobre o plano Oxy um mesmo domínio D, o volume V deste corpo será igual à diferença dos volumes dos corpos «cilíndricos»; o primeiro cilindro tem por base D e é limitado superiormente pela superfície $z = \Phi_2(x, y)$; o segundo cilindro tem igualmente por base D e é limitado superiormente pela superfície $z = \Phi_1(x, y)$ (fig. 294).

O volume V é, pois, a diferença de dois integrais duplos:

$$V = \iint_D \Phi_2(x, y)\, ds - \iint_D \Phi_1(x, y)\, ds,$$

ou

$$V = \iint_D [\Phi_2(x, y) - \Phi_1(x, y)]\, ds. \qquad (1)$$

É fácil de demonstrar que a fórmula (1) é verdadeira não só quando $\Phi_1(x, y)$ e $\Phi_2(x, y)$ são funções não negativas, mas também quando $\Phi_1(x, y)$ e $\Phi_2(x, y)$ são funções contínuas arbitrárias que satisfaçam à relação

$$\Phi_2(x, y) \geqslant \Phi_1(x, y).$$

Nota — 2. Se $f(x, y)$ muda de sinal em D, dividir-se-á D em dois domínios: 1) D_1 com $f(x, y) \geqslant 0$; 2) D_2 com $f(x, y) \leqslant 0$. Suponhamos D_1 e D_2 tais que os integrais duplos sobre estes domínios

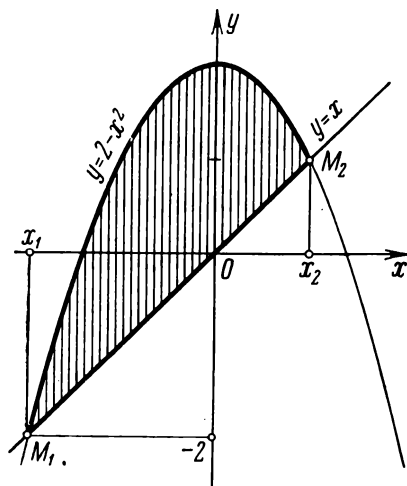



Fig. 295

existam. O integral sobre D_1 é, então, positivo e representa o volume do corpo que se encontra por cima do plano Oxy. O integral sobre D_2 é negativo e o seu valor absoluto representa o volume do corpo que se encontra por cima do plano Oxy. Por conseguinte, o integral sobre D representa a diferença dos volumes correspondentes.

2. *Áreas planas* — Se se formar uma soma integral para a função $f(x, y) = 1$ definida no domínio D, obtém-se a área

$$S = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta s_i,$$

qualquer que seja o corte Passando a limite no segundo membro, obtém-se

$$S = \iint_D dx\, dy.$$

Se o domínio D é regular (ver, por exemplo, fig. 280), a área exprime-se pelo integral duplo

$$S = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right) dx.$$

Tem-se, após integração do integral interno,

$$S = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\, dx$$

(comparar § 1, cap. XII, tomo I).

Exemplo — 2. Calcular a área do domínio limitado pelas curvas

$$y = 2 - x^2 \quad y = x.$$

Resolução — Determinemos os pontos de intersecção das curvas dadas (fig. 295). As ordenadas das duas curvas são iguais num ponto de intersecção:

$$x = 2 - x^2,$$

donde

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_1 = -2,$$

$$x_2 = 1.$$

Obtivemos dois pontos de intersecção: $M_1(-2, -2)$, $M_2(1, 1)$.
A área procurada é, pois,

$$S = \int_{-2}^{1} \left(\int_{x}^{2-x^2} dy \right) dx = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\, dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{1} = \frac{27}{6}.$$

§ 5. Integrais duplos em coordenadas polares

Consideremos, em coordenadas polares θ, ρ um domínio D tal que todo o raio procedente da origem e que passa por um ponto interior do domínio corta a fronteira de D em dois pontos ou mais. suponhamos que D é limitado pelas curvas $\rho = \Phi_1(\theta)$, $\rho = \Phi_2(\theta)$ e os raios $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$, com $\Phi_1(\theta) \leqslant \Phi_2(\theta)$ e $\alpha < \beta$ (fig. 296). Diremos, então, que um tal domínio é regular.

Seja em D uma função contínua das coordenadas θ e ρ:

$$z = F(\theta, \rho).$$

Decomponhamos arbitràriamente D em domínios parciais Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n.

Formemos a soma integral

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} F(P_k)\, \Delta s_k, \tag{1}$$

em que P_k é um ponto tomado em Δs_k.

Resulta do teorema de existência dos integrais duplos que quando o maior diâmetro dos Δs_k tende para zero, a soma integral (1) tem um limite V. Ele dá por definição de integral duplo de $F(\theta, \rho)$ em D:

$$V = \iint_D F(\theta, \rho)\, ds. \tag{2}$$

Ocupemo-nos do cálculo de um tal integral duplo.

Como o limite da soma integral não depende do modo do corte de D em domínios parciais Δs_k cortá-lo-emos, por razões de como-

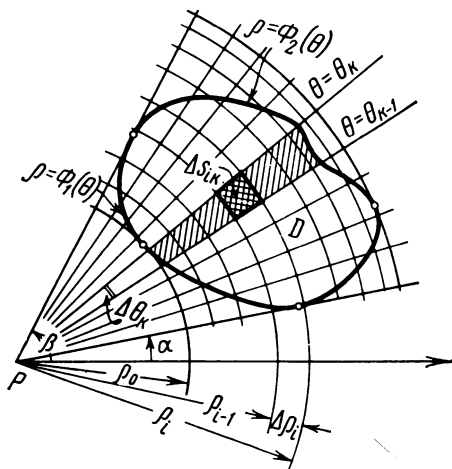



Fig. 296

didade, traçando raios $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$, ..., $\theta = \theta_n$ (em que $\theta_0 = \alpha$, $\theta_n = \beta$, $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n$)e circunferências concêntricas $\rho = \rho_0$, $\rho = \rho_1$, ..., $\rho = \rho_m$ onde [ρ_0 é o menor valor da função $\Phi_1(\theta)$ e ρ_m o maior valor de $\Phi_2(\theta)$ no intervalo fechado

$$\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta; \ldots \rho_0 < \rho_1 < \ldots < \rho_m].$$

Seja Δs_{ik} a área delimitada pelas linhas de coordenadas

$$\rho = \rho_{i-1}, \quad \rho = \rho_i, \quad \theta = \theta_{k-1}, \quad \theta = \theta_k.$$

Haverá 3 espécies de domínios parciais Δs_{ik}:

1. Domínios inteiramente interiores a D;
2. Domínios inteiramente exteriores a D;
3. Domínios que invadem a fronteira de D.

A soma das áreas que invadem a fronteira tende para zero quando $\Delta\theta_k \to 0$ e $\Delta\rho_i \to 0$; desprezar-se-á, pois, estas áreas. As áreas parciais Δs_{ik} exteriores a D não entram na soma integral con-

siderada e não apresentam interesse. Poder-seá, pois, escrever a soma integral sob a forma

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_i F(P_{ik})\, \Delta s_{ik}\right],$$

em que P_{ik} é um ponto arbitràriamente tomado em Δs_{ik}.

A soma dupla exprime que somamos em primeiro lugar sobre o índice i considerando k fixo (isto é, que fazemos a soma das áreas compreendidas entre dois raios vizinhos (*)). O sinal da soma exterior exprime que adicionamos as somas que resultam da primeira soma (somamos sobre k).

Achemos a expressão da área dum domínio parcial Δs_{ik} que não invade a fronteira de D. É a diferença das áreas de dois sectores:

$$\Delta s_{ik} = \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta\rho_i)^2\, \Delta\theta_k - \frac{1}{2}\rho_i^2 \Delta\theta_k = \left(\rho_i + \frac{\Delta\rho_i}{2}\right) \Delta\rho_i\, \Delta\theta_k$$

ou

$$\Delta s_{ik} = \rho_i^* \Delta\rho_i\, \Delta\theta_k, \quad \text{où } \rho_i < \rho_i^* < \rho_i + \Delta\rho_i.$$

A soma integral escreve-se, pois (**),

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_i F(\theta_k^*, \rho_i^*)\, \rho_i^* \Delta\rho_i \Delta\theta_k\right],$$

em que $P(\theta_k^*, \rho_i^*)$ é um ponto tomado em Δs_{ik}.

Destaquemos, agora, o factor $\Delta\theta_k$ da soma interior (o que é legítimo, porque é um factor comum a todos os termos desta soma):

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_i F(\theta_k^*, \rho_i^*)\, \rho_i^* \Delta\rho_i\right] \Delta\theta_k.$$

Suponhamos que $\Delta\rho_i \to 0$ e que $\Delta\theta_k$ é constante. Então, a expressão entre parêntesis tenderá para o integral

$$\int_{\Phi_1(\theta_k^*)}^{\Phi_2(\theta_k^*)} F(\theta_k^*, \rho)\, \rho\, d\rho.$$

(*) Notemos que somando sobre o índice i este índice não tomará, forçosamente, todos os valores de 1 a m, dado que todos os domínios parciais compreendidos entre os raios $\theta = \theta_k$ e $\theta = \theta_{k+1}$, não pertencem, forçosamente, a D.

(**) É permitido considerar uma soma integral sob esta forma, dado que o limite da soma não depende do ponto escolhido no domínio parcial.

Supondo agora que $\Delta\theta_k \to 0$ obtém-se, por fim (*):

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} F(\theta, \rho) \rho \, d\rho \right) d\theta. \tag{3}$$

A fórmula (3) serve para o cálculo de integrais duplos em coordenadas polares.

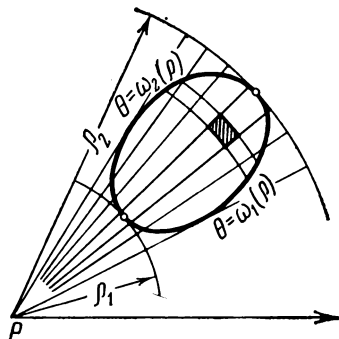



Fig. 297

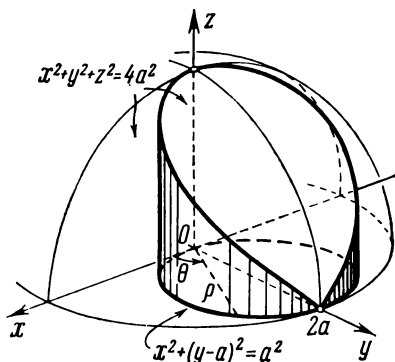



Fig. 298

Se se integrar primeiro sobre θ, depois sobre ρ, tem-se a fórmula (fig. 297):

$$V = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\int_{\omega_1(\rho)}^{\omega_2(\rho)} F(\theta, \rho) \, d\theta \right) \rho \, d\rho. \tag{3'}$$

Seja calcular o integral duplo da função $f(x, y)$ sobre o domínio D, sendo este integral escrito em coordenadas rectangulares:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy.$$

Se D é um domínio regular em coordenadas polares θ, ρ, poder-se-á passar nos cálculos às coordenadas polares.

(*) A nossa dedução da fórmula (3) não é rigorosa: em primeiro lugar temos feito tender $\Delta\rho_i$ para zero conservando $\Delta\theta_k$ invariável, e sòmente depois é que temos feito tender $\Delta\theta_k$ para zero. Isto não corresponde completamente à definição de integral duplo que consideramos como limite de somas integrais quando o maior diâmetro dos domínios parciais tendesse para zero(aqui seria preciso fazer tender para zero, simultâneamente, $\Delta\theta_k$ e $\Delta\rho_i$). Entretanto, apesar desta falta de rigor, o resultado está certo (isto é, que a fórmula (3) é legítima). Poder-se-ia estabelecer esta fórmula rigorosa como para o integral duplo em coordenadas rectangulares. Indicaremos que será estabelecida também no § 6 partindo de outras considerações (como caso particular da fórmula geral de transformação de coordenadas num integral duplo).

Com efeito, tem-se,

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta,$$

$$f(x, y) = f[\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta] = F(\theta, \rho),$$

por conseguinte,

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_\alpha^\beta \Big(\int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} f[\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta]\, \rho\, d\rho \Big) d\theta. \tag{4}$$

Exemplo — 1. Calcular o volume V do corpo compreendido entre a esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$$

e o cilindro

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0.$$

Resolução — Poder-se-á tomar por domínio de integração a base do cilindro $x^2 + y^2 - 2ay =$ isto é, o círculo do centro $(0, a)$ e de raio a. Pode-se escrever a equação deste círculo sob a forma $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ (fig. 298).

Calculemos um quarto do volume procurado V (metade está representao na fig. 298). Tomar-se-á, então, por domínio de integração o semi-círculo definido pelas equações

$$x = \varphi_1(y) = 0, \quad x = \varphi_2(y) = \sqrt{2ay - y^2},$$

$$y = 0, \quad y = 2a.$$

A função sob o sinal soma é

$$z = f(x, y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}.$$

Por conseguinte,

$$\frac{1}{4} V = \int_0^{2a} \Big(\int_0^{\sqrt{2ay - y^2}} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\, dx \Big) dy.$$

Passemos a coordenadas polares θ, ρ:

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\operatorname{sen}\theta.$$

Determinemos os limites de integração. Para esse efeito escrevamos a equação do círculo dado em coordenadas polares: como

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

$$y = \rho\operatorname{sen}\theta,$$

tem-se

$$\rho^2 - 2a\rho\operatorname{sen}\theta = 0$$

ou

$$\rho = 2a\operatorname{sen}\theta.$$

A fronteira do domínio em coordenadas polares, escreve-se, pois, (fig. 299):

$$\rho = \Phi_1(\theta) = 0, \quad \rho = \Phi_2(\theta) = 2a \operatorname{sen}\theta, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}.$$

A função a integrar transforma-se em

$$F(\theta, \rho) = \sqrt{4a^2 - \rho^2}.$$

Obtém-se, por conseguinte:

$$\frac{V}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a \operatorname{sen}\theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2}\, \rho\, d\rho \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{(4a^2 - \rho^2)^{3/2}}{3} \right]_0^{2a \operatorname{sen}\theta} d\theta =$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2\theta)^{3/2} - (4a^2)^{3/2}]\, d\theta =$$

$$= \frac{8a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^3\theta)\, d\theta = \frac{4}{9} a^3 (3\pi - 4).$$

Exemplo — 2. Calcular o integral de Poisson

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Resolução — Calculemos, primeiramente, o integral $I_R = \iint_D e^{-x^2 - y^2}\, dx\, dy$,

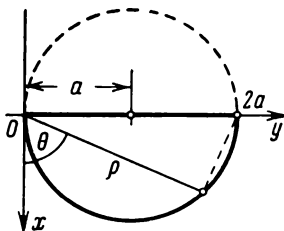



Fig. 299.

sendo o domínio de integração o círculo (fig. 300)

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Passemos a coordenadas polares θ, ρ:

$$I_R = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R e^{-\rho^2} \rho\, d\rho \right) d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \Big|_0^R d\theta = \pi (1 - e^{-R^2}).$$

Fazendo tender R para infinito, isto é, fazendo crescer indefinidamente o domínio de integração, tem-se

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho\, d\rho\right) d\theta = \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{R} e^{-\rho^2}\rho\, d\rho\right) d\theta = \lim_{R\to\infty}\pi\left(1-e^{-R^2}\right)=\pi.$$

Mostremos que o integral $\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ tende para π quando se alarga o domínio D' de modo que qualquer ponto do plano se encontre definitivamente em D' «convencionalmente escreveremos $D'\to\infty$).

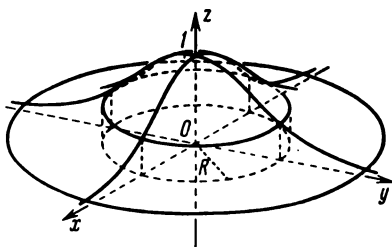



Fig. 300.

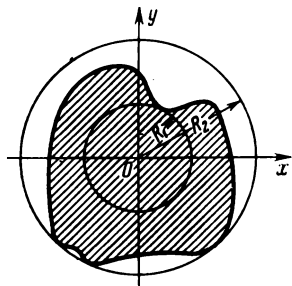



Fig. 301.

Sejam R_1 e R_2 a maior e a mais pequena distância da fronteira de D' à origem das coordenadas (fig. 301).

Como $e^{-x^2-y^2}>0$ para todo valor, tem-se

$$I_{R_1}\leqslant \iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \leqslant I_{R_2}$$

ou

$$\pi\left(1-e^{-R_1^2}\right)\leqslant \iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \leqslant \pi\left(1-e^{-R_2^2}\right).$$

Como $D'\to\infty$, tem-se $R_1\to\infty$ e $R_2\to\infty$, e os membros extremos da desigualdade tendem para um só e único limite π. O mesmo se diga, pois, do termo intermediário:

$$\lim_{D'\to\infty}\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy=\pi. \tag{5}$$

Suponhamos, em especial, que D' seja um quadrado de lado $2a$ e de centro na origem. Ter-se-á

$$\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy = \int_{-a}^{a}\left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\right)dy.$$

Ponhamos fora o factor e^{-y^2} do integral interno (o que é permitido, porque e^{-y^2} não depende da variável de integração x). Tem-se

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \int_{-a}^{a} e^{-y^2} \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx \right) dy.$$

Façamos $\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx = B_a$. É um número constante (depende sòmente de a); tem-se, pois,

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \int_{-a}^{a} e^{-y^2} B_a\, dy = B_a \int_{-a}^{a} e^{-y^2} dy.$$

Mas este último integral é também igual a B_a $\left(\text{porque} \int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx = \right.$ $\left. = \int_{-a}^{a} e^{-y^2} dy \right)$; por conseguinte,

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx\, dy = B_a B_a = B_a^2.$$

Passemos agora a limite fazendo tender a para infinito nesta igualdade (D' alargou-se, então, indefinidamente):

$$\lim_{D' \to \infty} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \lim_{a \to \infty} B_a^2 = \lim_{a \to \infty} \left[\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx \right]^2 =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right]^2.$$

Mas viu-se que (5)

$$\lim_{D' \to \infty} \iint_{D'} e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \pi.$$

Por conseguinte,

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 = \pi,$$

ou

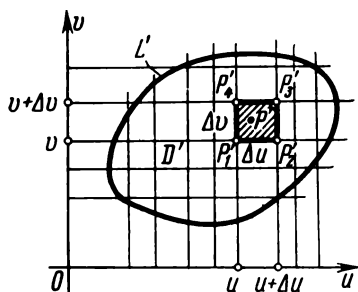
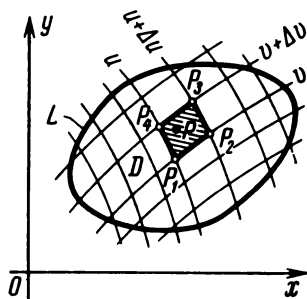
$$\int_{\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Este integral encontra-se muitas vezes em probabilidades e em estatística. Notemos que nos teria sido impossível calcular directamente este integral, dado que a primitiva de e^{-x^2} não se exprime por meio de funções elementares.

§ 6. Mudança de variáveis num integral duplo
(*caso geral*)

Consideremos um domínio D do plano *Oxy* limitado por uma curva *L*. Suponhamos que as coordenadas *x* e *y* são funções de novas variáveis *u* e *v*:

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \tag{1}$$

onde as funções $\varphi(u, v)$ e $\psi(u, v)$ são unívocas, contínuas e possuem derivadas contínuas num certo domínio *D'* que definiremos no segui-

F i g. 302.

F i g. 303.

mento. Corresponde, então, segundo as fórmulas (4) a qualquer par de valores *u* e *v*, um único par de valores *x* e *y*. Suponhamos, além disso, as funções φ e ψ tais que se der a *x* e *y* valores definidos do domínio *D*, lhes corresponde, então, valores determinados de *u* e *v* segundo as fórmulas (1).

Consideremos o sistema de coordenadas cartesianas *Ouv* (fig. 302). Resulta do que precede que a qualquer ponto $P(x, y)$ do plano *Oxy* (fig. 303) corresponde unìvocamente um ponto $P'(u, v)$ do plano *Ouv* de coordenadas *u*, *v* definidas pelas fórmulas (1). Os números *u* e *v* chamam-se coordenadas *curvilíneas* de *P*.

Se no plano *Oxy* o ponto *P* descreve a curva fechada *L* que delimita o domínio *D*, o ponto correspondente descreve no plano *Ouv* uma curva fechada *L'* que delimita um certo domínio *D'*: corresponde, então, a qualquer ponto de *D'* um ponto de *D*.

Assim, as fórmulas (1) estabelecem uma *correspondência biunívoca entre os pontos dos domínios D* e *D'*, ou, como se costuma dizer, *representam* biunìvocamente *D* sobre *D'*.

Consideremos em *D'* uma recta $u = \text{const.}$ Em regra, as fórmulas (1) fazem-lhe corresponder no plano *Oxy* uma linha curva.

Do mesmo modo, corresponderá a qualquer recta $v =$ const. do plano Ouv uma certa curva no plano Oxy.

Cortemos o domínio D′ pelas rectas $u =$ const. e $v =$ const. em pequenos domínios rectangulares (não teremos em conta os rectângulos que invadem a fronteira de D'). As curvas correspondentes do domínio D cortam este último em quadriláteros curvilíneos (fig. 303).

Consideremos no plano Ouv o rectângulo $\Delta s'$ limitado pelas rectas $u =$ const., $u + \Delta u =$ const., $v =$ const, $v + \Delta v =$ const. e o quadrilátero curvilíneo correspondente a Δs no plano Oxy.

Designaremos as áreas dos domínios parciais igualmente por $\Delta s'$ e Δs. Tem-se, evidentemente,

$$\Delta s' = \Delta u \Delta v.$$

As áreas Δs e $\Delta s'$ são, em regra, diferentes.

Suponhamos dada em D uma função contínua

$$z = f(x, y).$$

A todo o valor da função $z = f(x, y)$ do domínio D corresponde o mesmo valor de $z = F(u, v)$ em D', em que

$$F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)].$$

Consideremos as somas integrais da função z no domínio D. Tem-se, evidentemente, a igualdade seguinte:

$$\sum f(x, y)\,\Delta s = \sum F(u, v)\,\Delta s. \qquad (2)$$

Calculemos Δs, isto é, a área do quadrilátero curvilíneo $P_1P_2P_3P_4$ no plano Oxy (ver fig. 303).

Determinemos as coordenadas dos vértices:

$$\left.\begin{aligned} &P_1(x_1, y_1), \ x_1 = \varphi(u, v), && y_1 = \psi(u, v), \\ &P_2(x_2, y_2), \ x_2 = \varphi(u + \Delta u, v), && y_2 = \psi(u + \Delta u, v), \\ &P_3(x_3, y_3), \ x_3 = \varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), && y_3 = \psi(u + \Delta u, v + \Delta v), \\ &P_4(x_4, y_4), \ x_4 = \varphi(u, v + \Delta v), && y_4 = \psi(u, v + \Delta v). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Assemelharemos no cálculo da área do quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$, os arcos P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1 a segmentos de rectas paralelas: substituiremos, além disso, os acréscimos das funções pelos seus diferenciais.

Quer dizer, fazemos abstracção dos infinitamente pequenos de ordem mais elevada que Δu e Δv. As fórmulas (3) transformam-se, então, em

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \varphi(u, v), & y_1 &= \psi(u, v),\\
x_2 &= \varphi(u, v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u, & y_2 &= \psi(u, v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u,\\
x_3 &= \varphi(u, v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v, & y_3 &= \psi(u, v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v,\\
x_4 &= \varphi(u, v) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v, & y_4 &= \psi(u, v) + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v.
\end{aligned}\right\} \quad (3')$$

Sob estas hipóteses, o quadrilátero curvilíneo $P_1P_2P_3P_4$ pode ser assemelhado a um paralelogramo. A sua área Δs é aproximadamente igual ao dobro da área do triângulo $P_1P_2P_3$, que se calcula aplicando a fórmula correspondente da geometria analítica:

$$\Delta s \approx \left|(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\right)\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta u\,\Delta v - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u\,\Delta v\right| =$$

$$= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right|\Delta u\,\Delta v = \left\|\begin{matrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{matrix}\right\|\Delta u\,\Delta v\ ^{*}).$$

Façamos

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix} = I.$$

Por conseguinte,

$$\Delta s \approx |I|\,\Delta s'. \quad (4)$$

O determinante I chama-se *determinante funcional* ou *jacobiano* (do nome do matemático alemão Jacobi) das funções $\varphi(u, v)$ e $\psi(u, v)$.

(*) O duplo traço vertical significa que se toma o valor absoluto do determinante.

A igualdade (4) apenas é aproximada, dado que nos cálculos da área Δs desprezamos os infinitamente pequenos de ordem superior. No entanto, à medida que as dimensões dos domínios elementares Δs e $\Delta s'$ são mais pequenas, mais se aproxima da igualdade. A igualdade tem lugar quando se passa a limite, tendendo os diâmetros dos domínios elementares Δs e Δ' para zero:

$$|I| = \lim_{\mathrm{diam}\,\Delta s' \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta s'}.$$

Apliquemos agora a igualdade obtida ao cálculo do integral duplo. Em virtude da igualdade (2) pode-se escrever

$$\sum f(x, y)\,\Delta s \approx \sum F(u, v)\,|I|\,\Delta s'$$

(a soma integral da direita estende-se a D'). Passando a limite quando $\Delta s' \to 0$, obtém-se a igualdade rigorosa

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D'} F(u, v)\,|I|\,du\,dv. \tag{5}$$

Tal é a *fórmula de transformação das coordenadas em integral duplo.* Ela permite reduzir o cálculo dum integral duplo num domínio D

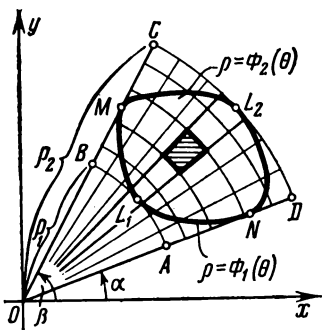



Fig. 304

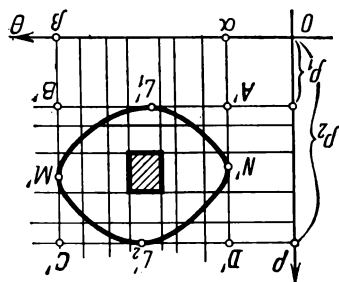



Fig. 305

ao cálculo dum integral duplo num domínio D', o que pode simplificar o problema. A primeira demonstração rigorosa desta fórmula deveu-se a M. Ostrogradsky.

Nota — A passagem das coordenadas cartesianas às coordenadas polares, examinada no parágrafo anterior, é um caso particular de mudança de variáveis num integral duplo. Neste caso, tem-se $u = \theta$, $v = \rho$:

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot$$

O arco de círculo AB ($\rho = \rho_1$) do plano Oxy (fig. 304) é representado pela recta $A'B'$ no plano $O\theta\rho$ (fig. 305). O arco de círculo DC ($\rho = \rho_2$) do plano Oxy é representado pela recta $D'C'$ do plano $O\theta\rho$.

As rectas AD e BC do plano Oxy estão representadas pelas rectas $A'D'$ e $B'C'$ do plano $O\theta\rho$. As curvas L_1 e L_2 estão representadas pelas curvas L_1' e L_2'.

Calculemos o jacobiano da transformação das coordenadas cartesianas x e y em coordenadas polares θ e ρ:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \\ \rho \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \end{vmatrix} =$$

$$= -\rho \operatorname{sen}^2 \theta - \rho \cos^2 \theta = -\rho.$$

Tem-se, pois, $|I| = \rho$ e

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_\alpha^\beta \Big(\int_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} F(\theta, \rho)\, \rho\, d\rho \Big)\, d\theta.$$

Volta-se a encontrar a fórmula estabelecida no parágrafo anterior.

Exemplo — Seja calcular o integral duplo

$$\iint_D (y - x)\, dx\, dy$$

em que D é o domínio do plano Oxy limitado pelas rectas

$$y = x + 1, \quad y = x - 3, \quad y = -\frac{1}{3} x + \frac{7}{3},$$

$$y = -\frac{1}{3} x + 5.$$

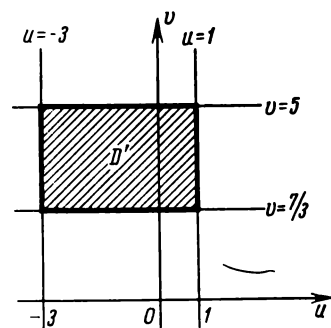



Fig. 306.

O cálculo directo deste integral é bastante fastidioso, mas uma mudança de variáveis simples permite reduzir este integral à integração num rectângulo cujos lados são paralelos aos eixos coordenados.

Façamos

$$u = y - x, \quad v = y + \frac{1}{3} x. \tag{6}$$

Então, as rectas $y = x + 1$, $y = x - 3$ são representadas, respectivamente, pelas rectas $u = 1$, $u = -3$ do plano Ouv; as rectas $y = -\frac{1}{3} x + \frac{7}{3}$, $y = -\frac{1}{3} x + 5$ tem por imagens as rectas $v = \frac{7}{3}$, $v = 5$.

O domínio D será, pois, representado pelo domínio rectangular D' da figura 306. Resta, pois, calcular o jacobiano da transformação. Exprimamos para

esse efeito x e y em função de u e v. Resolvendo o sistema de equações (6), obtém-se

$$x=-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v;\qquad y=\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v.$$

Por conseguinte,

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{3}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{vmatrix}=-\frac{9}{16}-\frac{3}{16}=-\frac{3}{4},$$

e o valor absoluto do jacobiano é $|I|=\frac{3}{4}$. Logo

$$\iint\limits_{D}(y-x)\,dx\,dy=\iint\limits_{D'}\left[\left(+\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v\right)-\left(-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v\right)\right]\frac{3}{4}\,du\,dv=$$

$$=\iint\limits_{D'}\frac{3}{4}u\,du\,dv=\int\limits_{\frac{7}{3}}^{5}\int\limits_{-3}^{1}\frac{3}{4}u\,du\,dv=-8.$$

§ 7. Cálculo das áreas de superfícies

Seja calcular a área limitada por uma curva T traçada sobre uma superfície (fig. 307); a superfície é dada pela equação $z=f(x, y)$ onde $f(x, y)$ é contínua e possui derivadas parciais contínuas.

Seja L a projecção de T sobre o plano Oxy. Designemos o domínio do plano Oxy limitado por L por D.

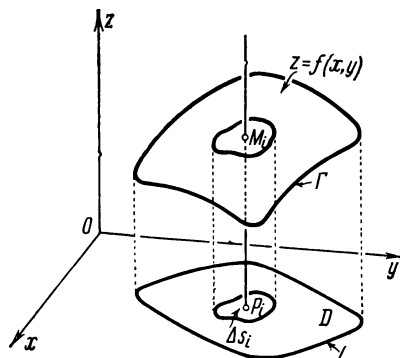



Fig. 307

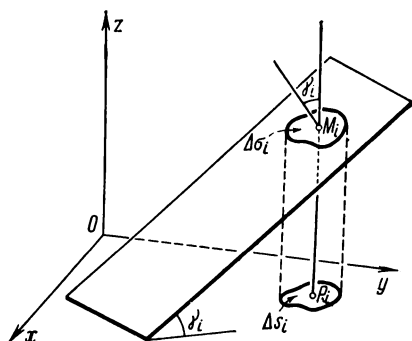



Fig. 308

Cortemos arbitràriamente D em n domínios elementares Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n. Tomemos em cada domínio elementar Δs_i um ponto arbitrário $P_i\ (\xi_i, \eta_i)$.

Corresponde ao ponto P_i um ponto sobre a superfície

$$M_i\,[\xi_i,\ \eta_i,\ f(\xi_i,\ \eta_i)].$$

Tracemos o plano tangente à superfície no ponto M_i. Tem por equação

$$z - z_i = f'_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f'_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i) \qquad (1)$$

(ver § 6, cap. IX, t. I). Delimitemos sobre este plano o domínio $\Delta\sigma_i$ tendo Δs_i como projecção sobre o plano Oxy. Consideremos a soma de todas as áreas correspondentes $\Delta\sigma_i$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i.$$

O limite σ desta soma quando o maior dos diâmetros dos tende para zero será, por definição, a *área da superfície:*

$$\sigma = \lim_{\operatorname{diam} \Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i. \qquad (2)$$

Calculemos agora a área da superfície. Designemos por γ_i o ângulo entre o plano tangente e o plano Oxy. Sabe-se de geometria analítica que (fig. 308)

$$\Delta s_i = \Delta\sigma_i \cos\gamma_i$$

ou

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta s_i}{\cos\gamma_i}. \qquad (3)$$

O ângulo γ_i é também o ângulo entre o eixo Oz e a normal ao plano (1). Tendo-se em conta (1) e por aplicação da correspondente fórmula de geometria analítica, obtém-se:

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i, \eta_i) + f'^2_y(\xi_i, \eta_i)}}.$$

Por conseguinte,

$$\Delta\sigma_i = \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i, \eta_i) + f'^2_y(\xi_i, \eta_i)}\, \Delta s_i.$$

Substituindo esta expresão na fórmula (2), tem-se:

$$\sigma = \lim_{\operatorname{diam} \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(\xi_i, \eta_i) + f'^2_y(\xi_i, \eta_i)}\, \Delta s_i.$$

Como o limite da soma integral do segundo membro desta última igualdade, é, por definição, o integral duplo

$\iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$, tem-se, por fim,

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy. \qquad (4)$$

Tal é a fórmula que permite calcular a área da superfície $z = f(x, y)$. Se a equação da superfície é dada sob a forma

$$x = \mu(y, z) \text{ ou melhor } y = \chi(x, z),$$

as fórmulas correspondentes do cálculo da área transformam-se em

$$\sigma = \iint_{D'} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dy\, dz, \qquad (3')$$

$$\sigma = \iint_{D''} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dz, \qquad (3'')$$

onde D' e D'' são domínios dos planos Oyz e Oxz sobre os quais se projecta a superfície dada.

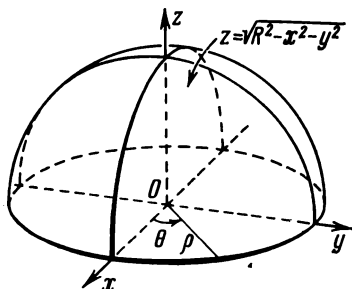



Fig. 309

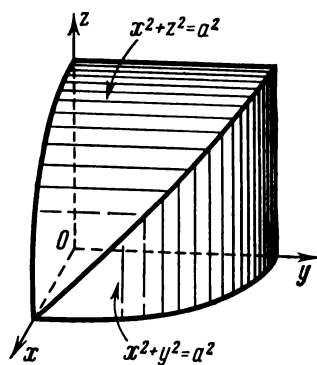



Fig. 310

Exemplo — 1. Calcular a área da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Resolução — Calculemos a área do hemisfério superior

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

(fig. 309). Tem-se:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Por conseguinte.

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

O domínio de integração é determinado pela condição

$$x^2+y^2 \leqslant R^2.$$

Logo, em virtude da fórmula (4), tem-se:

$$\frac{1}{2}\sigma=\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dy\right)dx.$$

Para calcular este integral duplo, passemos a coordenadas polares. A equação da fronteira do domínio de integração torna-se, então, em $\rho=R$. Por conseguinte,

$$\sigma=2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,\rho\,d\rho\right)d\theta=2R\int_0^{2\pi}[-\sqrt{R^2-\rho^2}]_0^R\,d\theta=2R\int_0^{2\pi}R\,d\theta=4\pi R^2.$$

$$=2R\int_0^{2\pi}R\,d\theta=4\pi R^2.$$

Exemplo — 2. Achar a área da parte do cilindro

$$x^2+y^2=a^2$$

cortada pelo cilindro

$$x^2+z^2=a^2.$$

Resolução — Na figura 310 tem-se representado a oitava parte da superfície em questão. A equação da superfície é

$$y=\sqrt{a^2-x^2},$$

donde

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,;\quad \frac{\partial y}{\partial z}=0\,;$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,.$$

O domínio de integração é o quarto de círculo da equação

$$x^2+z^2\leqslant a^2,\quad x\geqslant 0\,,\quad z\geqslant 0.$$

Por conseguinte,

$$\frac{1}{8}\sigma=\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dz\right)dx=a\int_0^a\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=a\int_0^a dx=a^2,\qquad \sigma=8a^2.$$

§ 8. Densidade de distribuição de matéria e integral duplo

Suponhamos, distribuído num domínio D uma certa matéria, de modo que cada unidade de área deste domínio contenha uma certa quantidade desta matéria. Falaremos no seguimento da distribuição de massa, se bem que os raciocínios que se seguem, sejam válidos quando se trata de distribuição de carga eléctrica, de quantidade de calor, etc.

Consideremos um elemento de área arbitrário Δs do domínio D. Seja Δm a massa da matéria distribuída sobre este elemento. Chama-se, então, à relação $\frac{\Delta m}{\Delta s}$ densidade superficial média da matéria no domínio Δs.

Suponhamos agora que a área Δs se encerra em volta do ponto $P(x, y)$. Consideremos o limite $\lim\limits_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta m}{\Delta s}$. Se ele existir, dependerá, em regra. da posição do ponto P, isto é, das coordenadas x e y. É, pois, uma função $f(P)$ do ponto P. Chamaremos a este limite *densidade superficial* da matéria no ponto P:

$$\lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta m}{\Delta s} = f(P) = f(x, y). \tag{1}$$

Assim, a densidade superficial é uma função $f(x, y)$ das coordenadas do ponto considerado no domínio.

Inversamente, supomos dado no domínio D a densidade superficial duma certa matéria como função contínua $f(P) = f(x, y)$; pede-se para determinar a quantidade total de matéria M contida em D. Cortemos o domínio D em áreas parciais Δs_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ e tomemos em cada área um ponto P_i; $f(P_i)$ representa, então, a densidade superficial no ponto P_i

O produto $f(P_i)\,\Delta s_i$ representa, então, a menos de um infinitamente pequeno de ordem superior, a quantidade de matéria contida na área Δs_i, e a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i$$

exprime aproximadamente a quantidade total de matéria distribuída no domínio D. Ora, é uma soma integral para a função $f(P)$ em D. Obtém-se um valor exacto passando a limite quando

Por conseguinte (*),

$$M = \lim_{\Delta s_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i = \iint_D f(P)\,ds = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy, \tag{2}$$

(*) A espressão $\Delta s_i \to 0$ significa, aqui, que o diâmetro do elemento de área Δs_i tende para zero.

isto é, que a quantidade total de matéria no domínio D é igual ao integral duplo sobre D da densidade $f(P) = f(x, y)$ desta matéria.

Exemplo — Determinar a massa duma placa circular de raio R, sabendo que a densidade superficial $f(x, y)$ do material em cada ponto $P(x, y)$ é proporcional à distância do ponto (x, y) ao centro do círculo:

$$f(x, y) = k\sqrt{x^2+y^2}.$$

Resolução — De acordo com a fórmula (2), tem-se:

$$M = \iint\limits_D k\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

onde o domínio de integração D é o círculo $x^2+y^2 \leqslant R^2$.
Passando a coordenadas polares, obtém-se:

$$M = k\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \rho\rho\,d\rho\right)d\theta = k2\pi\left.\frac{R^3}{3}\right|_0^R = \frac{2}{3}k\pi R^3.$$

§ 9. Momento de inércia duma figura plana

Chama-se momento de inércia I dum ponto material M de massa m em relação a um ponto O ao produto desta massa m pelo quadrado da distância r do ponto M ao ponto O:

$$I = mr^2.$$

O momento de inércia dum sistema de pontos materiais m_1, m_2, ..., m_n em relação a O é a soma dos momentos de inércia dos diversos pontos do sistema:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

Determinemos agora o momento de inércia duma figura material plana D.

Suponhamos D contido no plano Oxy. Determinemos o momento de inércia desta figura em relação à origem O supondo a densidade superfcial constante e igual à unidade.

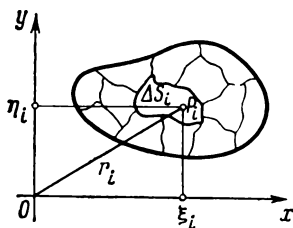



Fig. 311

Cortemos D em áreas elementares ΔS_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) fig. 311). Tomemos em cada elemento de área um ponto P_i de coordenadas ξ_i, η_i. Chamamos momento de inércia elementar ΔI_i da área ΔS_i ao produto da massa ΔS_i pelo quadrado da distância $r_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2$:

$$\Delta I_i = (\xi_i^2 + \eta_i^2)\,\Delta S_i$$

e formemos a soma de tais momentos:

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2) \Delta S_i.$$

Ela define uma soma integral para a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ no domínio D.

Definamos o momento de inércia da figura como limite desta soma integral quando o diâmetro de cada elemento ΔS_i tende para zero:

$$I_0 = \lim_{\text{diam } \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2) \Delta S_i.$$

Mas o limite desta soma é o integral duplo $\iint_D (x^2 + y^2) \times dx\, dy$.

Por conseguinte, o momento de inércia da figura D, em relação à origem das coordenadas, é

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy, \tag{1}$$

sendo D o domínio definido pela figura plana dada.

Os integrais

$$I_{xx} = \iint_D y^2\, dx\, dy, \tag{2}$$

$$I_{yy} = \iint_D x^2\, dx\, dy \tag{3}$$

chamam-se, respectivamente, os momentos de inércia da figura D em relação aos eixos Ox e Oy.

Exemplo — 1. Calcular o momento de inércia do círculo cheio D de raio R em relação ao seu centro O.

Resolução — Segundo a fórmula (1), tem-se:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

Passando a coordenadas polares θ, ρ, a equação deste círculo transforma-se em

$$\rho = R.$$

Logo

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \rho^2 \rho\, d\rho \right) d\theta = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Nota — Se a densidade superficial γ não é igual à unidade mas é uma funcão de x e y, isto é, $\gamma = \gamma(x, y)$, a massa de área ΔS_i será igual, a menos de um infinitamente pequeno de ordem superior, a

$\gamma(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$ e o momento de inércia duma figura plana em relação à origem se transforma em

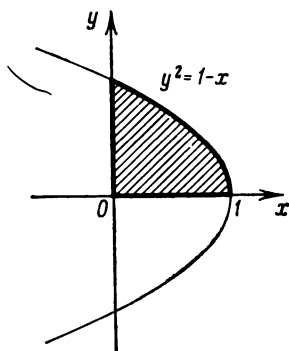
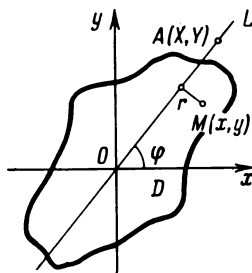
$$I_0 = \iint_D \gamma(x, y)(x^2 + y^2)\,dx\,dy. \qquad (1')$$

Exemplo — 2. Calcular o momento de inércia da figura material plana D limitada pelas curvas $y^2 = 1 - x$; $x = 0$, $y = 0$ em relação ao eixo Oy, sabendo que a densidade superficial em cada ponto é igual a y (fig. 312).

Resolução.

$$I_{yy} = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x}} yx^2\,dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2y^2}{2} \Bigg|_0^{\sqrt{1-x}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2(1-x)\,dx = \frac{1}{24}.$$

Elipse de inércia — Determinemos o momento de inércia duma figura plana D em relação a um certo eixo OL passando por um

F i g. 312.

F i g. 313.

ponto O que tomamos para origem das coordenadas. Seja φ o angulo formado pela recta OL com a direcção positiva do eixo Ox (fig. 313).

A equação normal da recta OL é

$$x \operatorname{sen} \varphi - y \cos \varphi = 0.$$

A distância r dum ponto qualquer $M(x, y)$ a esta recta é igual a

$$r = |\, x \operatorname{sen} \varphi - y \cos \varphi \,|.$$

O momento de inércia I da figura plana D em relação à recta OL é, por definição,

$$I = \iint_D r^2\,dx\,dy = \iint_D (x\,\text{sen}\,\varphi - y\cos\varphi)^2\,dx\,dy =$$

$$= \text{sen}^2\,\varphi \iint_D x^2\,dx\,dy - 2\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi \iint_D xy\,dx\,dy + \cos^2\varphi \iint_D y^2\,dx\,dy.$$

Por conseguinte,

$$I = I_{yy}\,\text{sen}^2\,\varphi - 2I_{xy}\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi + I_{xx}\cos^2\varphi, \tag{4}$$

onde $I_{yy} = \iint_D x^2\,dx\,dy$ é o momento de inércia da figura em relação ao eixo y e $I_{xx} = \iint_D y^2\,dx\,dy$ o momento de inércia em relação ao eixo x; pusemos, além disso, $I_{xy} = \iint_D xy\,dx\,dy$. Dividamos todos os termos da igualdade (4) por I; obtém-se:

$$1 = I_{xx}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{I}}\right)^2 - 2I_{xy}\left(\frac{\text{sen}\,\varphi}{\sqrt{I}}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{I}}\right) + I_{yy}\left(\frac{\text{sen}\,\varphi}{\sqrt{I}}\right)^2. \tag{5}$$

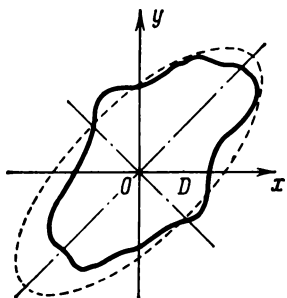



Fig. 314

Tomemos sobre o eixo OL um ponto $A(X, Y)$ tal que

$$OA = \frac{1}{\sqrt{I}}.$$

Corresponde a diversas direcções OL, isto é, a diversos ângulos φ, diversos valores I e logo diversos pontos A. Procuremos o lugar geométrico dos pontos A. Obtém-se, evidentemente,

$$X = \frac{1}{\sqrt{I}}\cos\varphi, \qquad Y = \frac{1}{\sqrt{I}}\,\text{sen}\,\varphi.$$

Em virtude da igualdade (5), as quantidades X e Y estão ligadas entre si pela relação

$$1 = I_{xx}X^2 - 2I_{xy}XY + I_{yy}Y^2. \tag{6}$$

O lugar geométrico dos pontos $A(X, Y)$ é, pois, a curva do segundo grau (6). Mostremos que é uma elipse.

Tem-se a igualdade seguinte, chamada de Bouniakovsky (*) (matemático russo):

$$(\iint_D xy\,dx\,dy)^2 < (\iint_D x^2\,dx\,dy)(\iint_D y^2\,dx\,dy)$$

ou

$$I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2 > 0.$$

Assim, o descriminante da curva (6) é positivo, o que mostra que é uma elipse (fig. 314). Chama-se *elipse de inércia*. A noção de elipse de inércia é fundamental em mecânica.

Notemos que os comprimentos dos eixos da elipse de inércia e a sua disposição no plano dependem da forma da figura plana dada. Como a distância da origem das coordenadas a um ponto arbitrário A

(*) Para demonstrar a desigualdade de Bouniakovsky, consideremos a desigualdade evidente:

$$\iint_D [f(x, y) - \lambda\varphi(x, y)]^2\,dx\,dy \geqslant 0,$$

onde λ é uma constante. A igualdade não é possível senão quando $f(x, y) - \lambda\varphi(x, y) \equiv 0$, isto é, se $f(x, y) = \lambda\varphi(x, y)$. Se se supuser que $\frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)} \neq \text{const} = \lambda$, ter-se-á sempre uma desigualdade. Obtém-se, pois, desenvolvendo os parêntesis sob o sinal de integral:

$$\iint_D f^2(x, y)\,dx\,dy - 2\lambda\iint_D f(x, y)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy +$$

$$+ \lambda^2\iint_D \varphi^2(x, y)\,dx\,dy > 0.$$

Consideremos a expressão do primeiro membro como função de λ. É um polinómio do segundo grau que não se anula: as suas raízes são, pois, complexas, o que implica que o descriminante formado com os coeficientes do polinómio do segundo grau é negativo, isto é, que

$$(\iint_D f\varphi\,dx\,dy)^2 - \iint_D f^2\,dx\,dy \iint_D \varphi^2\,dx\,dy < 0$$

ou

$$\left(\iint_D f\varphi\,dx\,dy\right)^2 < \iint_D f^2\,dx\,dy \iint_D \varphi^2\,dx\,dy.$$

É a desigualdade de Bouniakovsky.

No nosso caso, $f(x, y) = x$, $\varphi(x, y) = y$, $\frac{x}{y} \neq \text{const}$.

A notável desigualdade de Bouniakovsky intervém, constantemente, em matemáticas. Em muitas obras chama-se injustamente desigualdade de Schwarz. Bouniakovsky publicou-a (bem como outras desigualdades importantes) em 1859 e Schwarz em 1875.

da elipse é igual a $\frac{1}{\sqrt{I}}$, onde I é o momento de inércia da figura relativamente ao eixo OA, ao construir-se a elipse, calcula-se fàcilmente o momento de inércia da figura D em relação a uma recta qualquer que passe pela origem das coordendas. Em particular, é fácil de ver que o momento de inércia da figura é mínimo em relação ao eixo maior da elipse e máximo em relação ao eixo menor.

§ 10. Coordenadas do centro de gravidade duma figura plana

Indicamos no § 8 do capítulo XII (tomo I) que as coordenadas do centro de gravidade do sistema de pontos materiais $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de massas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ eram dadas pelas fórmulas

$$x_c = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}; \qquad y_c = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}. \tag{1}$$

Determinemos agora as coordenadas do centro de gravidade duma figura plana D. Cortemos estas figuras em áreas elementares muito pequenas ΔS_i. Se se suposer que a densidade superficial é igual à unidade, a massa do elemento parcial será igual à sua área. Além disso, se se suposer, em primeira aproximação, que toda a massa da área elementar ΔS_i está concentrada em qualquer um dos seus pontos $P_i\,(\xi_i, \eta_i)$, poder-se-á assemelhar a figura D a *um sistema de pontos materiais*. Em virtude das fórmulas (1) as coordenadas do centro de gravidade da figura serão, então, determinados *aproximadamente* pelas igualdades:

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \xi_i \,\Delta S_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \Delta S_i}; \qquad y_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \eta_i \,\Delta S_i}{\sum_{i=1}^{i=n} \Delta S_i}.$$

No limite, quando $\Delta S_i \rightarrow 0$, as somas integrais dos numeradores e dos denominadores definem os integrais duplos e obtemos fórmulas exactas para o cálculo do centro de gravidade duma figura plana:

$$x_c = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}; \qquad y_c = \frac{\iint_D y\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}. \tag{2}$$

Estas fórmulas, que foram estabelecidas para uma figura plana de densidade superficial igual a um, subsistem para uma figura cuja densidade fosse uma constante γ.

Se a densidade superficial é variável:

$$\gamma = \gamma(x, y),$$

as fórmulas correspondentes tomam, então, a forma

$$x_c = \frac{\iint\limits_D \gamma(x, y)\, x\, dx\, dy}{\iint\limits_D \gamma(x, y)\, dx\, dy}; \qquad y_c = \frac{\iint\limits_D \gamma(x, y)\, y\, dx\, dy}{\iint\limits_D \gamma(x, y)\, dx\, dy}.$$

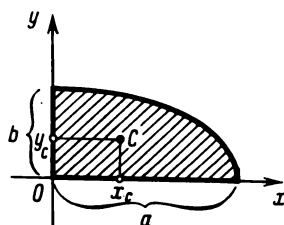
As expressões

$$M_y = \iint\limits_D \gamma(x, y)\, x\, dx\, dy$$

e

$$M_x = \iint\limits_D \gamma(x, y)\, y\, dx\, dy$$

são chamadas *momentos estáticos* da figura plana D em relação aos eixos Oy e Ox.

o integral $\iint \gamma(x, y)\, dx\, dy$ exprime a *massa* da figura considerada.

F i g. 315.

Exemplo — Determinar as coordenadas do centro de gravidade dum quarto de elipse (fig. 315)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

supondo a densidade superficial igual a 1.

Resolução — Segundo as fórmulas (2):

$$x_c = \frac{\int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} x\, dy \right) dx}{\int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \right) dx} = \frac{\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, x\, dx}{\frac{1}{4}\pi ab} =$$

$$= \frac{-\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}\Big|_0^a}{\frac{1}{4}\pi ab} = \frac{4a}{3\pi},$$

$$y_c = \frac{\int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\, dy \right) dx}{\frac{1}{4}\pi ab} = \frac{4b}{3\pi}.$$

§ 11. Integrais triplos

Consideremos um domínio V do espaço limitado por uma superfície S. Seja $f(x, y, z)$ uma função em que x, y, z são as coordenadas rectangulares dum ponto do espaço, definida e contínua em V e sobre a sua fronteira. Para fixar ideias, quando $f(x, y, z) \geqslant 0$, poder-se-á supor que esta função representa a densidade de distribuição duma certa matéria em V.

Cortemos o domínio V arbitràriamente em domínios parciais Δv_i, onde Δv_i representará igualmente o volume do pequeno domínio correspondente. Tomemos um ponto arbitrário P_i em cada Δv_i e designemos por $f(P_i)$ o valor da função f nesse ponto. Formemos a soma integral

$$\sum f(P_i)\, \Delta v_i \tag{1}$$

e aumentemos o número de domínios parciais Δv_i de modo que os seus diâmetros tendam para zero (*). Se a função $f(x, y, z)$ é contínua, o limite das somas integrais (1) existe (dá-se aqui, ao limite, o mesmo sentido que para os integrais duplos (**). Este limite, que não depende nem do modo da divisão do domínio V nem da escolha dos pontos P_i, é designado pelo símbolo $\iiint_V f(P)\, dv$ e chama-se *integral triplo.*

(*) Chama-se diâmetro do domínio Δv_i à maior distância entre os pontos da sua fronteira.

(**) Não demonstraremos este teorema de existência do limite das somas integrais (teorema de existência de integrais triplos) que tem lugar para qualquer função contínua num domínio fechado V (compreendendo a fronteira).

Tem-se, então, por definição

$$\lim_{\text{diam}\,\Delta v_i \to 0} \sum f(P_i)\,\Delta v_i = \iiint_V f(P)\,dv$$

$$\iiint_V f(P)\,dv = \iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \qquad (2)$$

Se se considera que $f(x, y, z)$ é a densidade especial da distribuição duma matéria num domínio V, o integral (2) dá a massa de toda a matéria que se encontre em V.

§ 12. Cálculo dos integrais triplos

Suponhamos que um domínio *espacial* (tridimensional) V limitado por uma superfície fechada S goza das seguintes propriedades:

1. Qualquer paralela ao eixo Oz que passe por um ponto interior (isto é, não tangente à fronteira S) de V corta a superfície S em dois pontos;

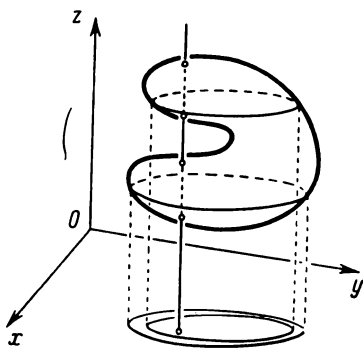



Fig. 316.

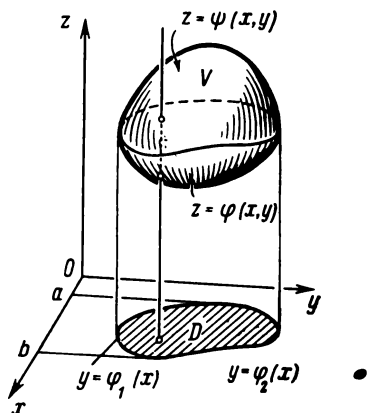



Fig. 317.

2. Todo o domínio inteiro V tem por projecção sobre o plano Oxy um domínio regular D (a duas dimensões);

3. Qualquer parte de V obtida cortando V por um plano paralelo a um plano de coordenadas quaisquer (Oxy, Oxz, Oyz) goza igualmente das propriedades 1. e 2.

Um domínio com três dimensões que goza das propriedades indicadas, dir-se-á *regular*.

Tais são, por exemplo, a elipsoide, o paralelipedo recto, o tetraedro, etc. Dá-se um exemplo de domínio irregular a três dimensões na fig. 316. Neste parágrafo, apenas consideraremos domínios regulares.

Suponhamos que a superfície que limita o domínio V tem por equação na sua parte inferior $z = \chi(x, y)$ e na sua parte superior $z = \psi(x, y)$ (fig. 317).

Vamos dar um processo de cálculo de um integral triplo I_V num domínio V para uma função de três variáveis $f(x, y, z)$, definida e contínua em V. Suponhamos que a projecção D e V sobre o plano Oxy é limitado pelas curvas

$$y = \varphi_1(x), \quad y = \varphi_2(x), \quad x = a, \quad x = b.$$

Tem-se, então,

$$I_V = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\chi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dy \right\} dx. \tag{1}$$

Observemos que após integração em relação a z e substituição dos limites nos parêntesis de (1), obtém-se uma função de x e y. Resta, então, um integral duplo sobre D que se sabe integrar,.

Fig. 318

Consideremos um exemplo de cálculo dum integral triplo.

Exemplo — 1. Calcular o integral triplo da função $f(x, y, z) = xyz$ no volume V limitado pelos planos

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1.$$

Resolução — Este domínio é regular. É limitado superiormente e inferiormente pelos planos $z = 0$ e $z = 1 - z - y$ e a sua projecção sobre o plano Oxy é um domínio regular D que é o triângulo limitado pelas rectas $x = 0$, $y = 0$, $y = 1 - x$ (fig. 318). Por conseguinte,

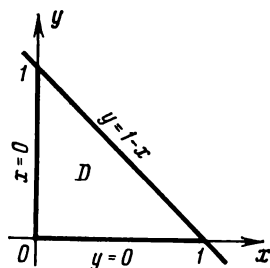
$$I_V = \iint_D \left[\int_0^{1-x-y} xyz\, dz \right] d\sigma.$$

Introduzamos os limites de integração no integral duplo sobre o domínio D:

$$I_V = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} xyz\, dz \right] dy \right\} dx =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \frac{xyz^2}{2} \Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right\} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} xy(1-x-y)^2\, dy \right\} dx = \int_0^1 \frac{x}{24}(1-x)^4\, dx = \frac{1}{720}.$$

Consideremos agora algumas propriedades dos integrais triplos.

Propriedade — 1. *Se se cortar o domínio V em dois domínios V_1 e V_2 por um plano paralelo a um plano de coordenadas quaisquer, o integral triplo em V é a soma dos integrais triplos em V_1 e V_2.* A demonstração desta propriedade é análoga em todos os pontos dos integrais duplos. Não há lugar, pois, a repetição.

Corolário — Qualquer que seja a divisão do domínio V em número finito de domínios $V_1, V_2, \ldots, V_n$, tem-se

$$I_V = I_{V_1} + I_{V_2} + \ldots + I_{V_n}.$$

Propriedade — 2. (Teorema sobre a avaliação dum integral triplo). *Sendo m e M o mínimo e máximo valor de $f(x, y, z)$ em V, tem-se a igualdade*

$$mV \leqslant I_V \leqslant MV,$$

onde V é o volume do domínio dado e I_V o integral triplo de $f(x, y, z)$ em V.

Demonstração — Calculemos, em primeiro lugar, o integral interno no integral triplo $I_V = \iint\limits_D \left[\int\limits_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz\right] d\sigma$:

$$\int\limits_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz \leqslant \int\limits_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} M\, dz = M \int\limits_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} dz =$$

$$= Mz \Big|_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} = M[\psi(x, y) - \chi(x, y)].$$

O integral interno não é, pois, superior à expressão $M[\psi(x, y) - \chi(x, y)]$. Por conseguinte, em virtude do teorema do § 1 sobre os integrais duplos, obtém-se (designando por D a projecção de V sobre o plano Oxy):

$$I_V = \iint\limits_D \left[\int\limits_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz\right] d\sigma \leqslant \iint\limits_D M[\psi(x, y) -$$

$$- \chi(x, y)]\, d\sigma = M \iint\limits_D [\psi(x, y) - \chi(x, y)]\, d\sigma.$$

Mas este último integral duplo é igual ao volume do domínio compreendido entre as superfícies $z = \chi(x, y)$ e $z = \psi(x, y)$, isto é, ao volume do domínio V. Logo, tem-se

$$I_V \leqslant MV.$$

Demonstra-se duma maneira análoga que $I_V \geqslant mV$. A propriedade 2 está, assim, demonstrada.

Propriedade — 3. (Teorema da média). *O integral triplo* I_V *duma função contínua* $f(x, y, z)$ *num domínio* V *é igual ao produto do seu volume* V *pelo valor da função num certo ponto* P *do domínio:*

$$I_V = \int_a^b \{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} [\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\,dz\,]dy\}\,dx = f(P)\,V. \tag{2}$$

A demonstração desta propriedade é análoga à da propriedade correspondente dos integrais duplos [ver § 2, propriedade 3, fórmula (4)]. Podemos, agora, demonstrar o teorema sobre o cálculo dos integrais triplos.

Teorema — *O integral triplo duma função* $f(x, y, z)$ *num domínio regular* V *tem por expressão*

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dv = \int_a^b \{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} [\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\,dz]\,dy\}\,dx.$$

Demonstração — Cortemos o domínio V por planos paralelos aos planos de coordenadas em n domínios regulares:

$$\Delta v_1,\ \Delta v_2,\ \dots,\ \Delta v_n.$$

Designemos, como acima, por I_V o integral triplo de $f(x, y, z)$ em V e por $I_{\Delta v_i}$ o integral triplo desta função no elemento de volume Δv_i. Pode-se escrever, em virtude da propriedade 1 (do seu corolário):

$$I_V = I\Delta_{v_1} + I\Delta_{v_2} + \dots + I\Delta_{v_n}. \tag{3}$$

Transformemos cada termo do segundo membro, segundo a fórmula (2):

$$I_V = f(P_1)\,\Delta v_1 + f(P_2)\,\Delta v_2 + \dots + f(P_n)\,\Delta v_n, \tag{4}$$

onde P_i é um ponto de Δv_i.

Tem-se, no segundo membro desta igualdade, uma soma integral. $f(x, y, z)$ é, por hipótese, uma função contínua no domínio V e o limite desta soma, quando o maior diâmetro dos Δv_i tende para zero, existe e define o integral triplo de $f(x, y, z)$ em V. Obtém-se, pois, passando a limite na igualdade (4) quando o diâmetro $\Delta v_i \to 0$:

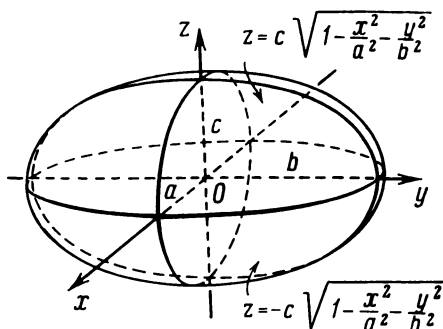
$$I_V = \iiint_V f(x, y, z)\,dv,$$

ou seja, ainda,

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dv = \int_a^b \{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi^2(x)} [\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\,dz]\,dy\}\,dx.$$

O teorema está demonstrado.

Aqui $z = \chi(x, y)$ e $z = \psi(x, y)$ são equações das superfícies que limitam o domínio regular V inferiormente e superiormente. As curvas $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $y = b$ delimitam o domínio D, projecção de V sobre o plano Oxy.

Nota — Tal como para os integrais duplos, pode-se formar integrais triplos com ordens diferentes de integração em relação às variáveis e com outros limites, se porventura a forma do domínio o permitir.

F i g. 319.

Cálculo do volume dum corpo por meio dum integral triplo — Se a função a integrar é $f(x, y, z) = 1$, o integral triplo no domínio V exprime o *volume V deste domínio*:

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz. \qquad (5)$$

Exemplo — 2. Calcular o volume do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Resolução — O elipsóide (fig. 319) é limitado inferiormente pela superfície $z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ e superiormente pela superfície $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$.

A projecção deste elipsóide sobre o plano Oxy (domínio D) é a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Tem-se, pois, reduzindo ao cálculo dum integral triplo:

$$V=\int_{-a}^{a}\left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dz\right)dy\right]dx=$$

$$=2c\int_{-a}^{a}\left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\right]dx.$$

Quando se calcula o integral interno considera-se x constante. Façamos a mudança de variável

$$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\operatorname{sen} t,\quad dy=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t\,dt.$$

A variável y vai de $-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ a $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, pois t varia de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. Substituindo estes novos limites no integral, obtém-se:

$$V=2c\int_{-a}^{a}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\operatorname{sen}^2 t}\times\right.$$

$$\left.\times b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t\,dt\right]dx=2cb\int_{-a}^{a}\left[\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt\right]dx=$$

$$=\frac{cb\pi}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4\pi abc}{3}.$$

Assim,

$$V=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Se $a=b=c$, obtém-se o volume da esfera:

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

§ 13. Mudança de variáveis num integral duplo

1. *Integral triplo em coordenadas cilíndricas* — Chamam-se coordenadas cilíndricas aos três números θ, ρ, z que definem a posição num ponto P do espaço, sendo θ e ρ as coordenadas polares da pro-

jecção do ponto P sobre o plano Oxy e z a cota de P, isto é, a sua distância ao plano Oxy tomado com o sinal mais se o ponto se encontra acima do plano Oxy e com o sinal menos no caso contrário (fig. 320).

Corte-se o domínio espacial dado V em volumes elementares pelas superfícies de coordenadas $\theta = \theta_i$, $\rho = \rho_j$, $z = z_k$ (semi-planos que contêm o eixo Oz, cilindros circulares de eixo Oz, planos perpendiculares a Oz). Um volume elementar é, então, um «prisma» curvilíneo (representado na fig. 321). A área da base deste prisma é igual, a menos

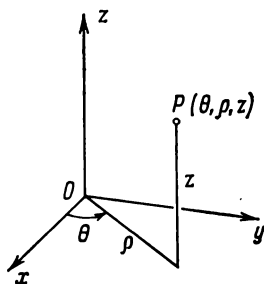



Fig. 320

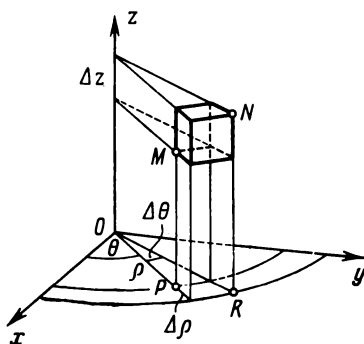



Fig. 321

de um infinitamente pequeno de ordem superior, a $\rho\Delta\theta\Delta\rho$, sendo a sua altura Δz (omitimos os índices i, j, k para abreviar a escrita). Tem-se, pois, $\Delta v = \rho\Delta\theta\Delta\rho\Delta z$. O integral triplo da função $F(\theta, \rho, z)$ no domínio V escreve-se, então,

$$I = \iiint_V F(\theta, \rho, z)\,\rho\, d\theta\, d\rho\, dz. \quad (1)$$

Os limites de integração são determinados pela forma do domínio V.

Se o integral triplo de $f(x, y, z)$ é dado em coordenadas rectangulares, é fácil dar a sua expressão em coordenadas cilíndricas. Com efeito, tendo em consideração que

$$x = \rho\cos\theta\,;\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,;\ z = z,$$

obtém-se:

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_V F(\theta, \rho, z)\,\rho\, d\theta\, d\rho\, dz,$$

onde

$$f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, z) = F(\theta, \rho, z).$$

Exemplo — Determinar a massa M dum hemisfério de raio R e de centro na origem das coordenadas, sabendo que a sua densidade F é proporporcional em cada ponto (x, y, z) à distância deste ponto à base: $F = kz$.

Resolução — A equação do hemisfério superior

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

escreve-se em coordenadas cilíndricas

$$z=\sqrt{R^2-\rho^2}.$$

Por conseguinte,

$$M=\iiint_V kz\rho\, d\theta\, d\rho\, dz=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} kz\, dz\right)\rho\, d\rho\right]d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R \frac{kz^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho\, d\rho\right]d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R \frac{k}{2}(R^2-\rho^2)\,\rho\, d\rho\right]d\theta=$$

$$=\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right]d\theta=\frac{k}{2}\,\frac{R^4}{4}\,2\pi=\frac{k\pi R^4}{4}$$

2. *Integral triplo em coordenadas cilíndricas.* — Em coordenadas esféricas, a posição dum ponto P no espaço é definida por três números

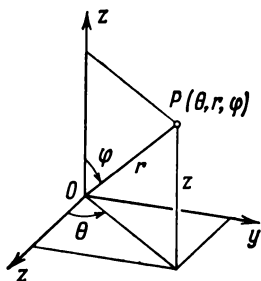



Fig. 322

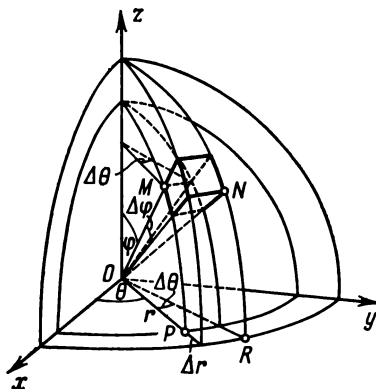



Fig. 323

θ, r, φ em que r é a distância do ponto à origem das coordenadas, chamado também raio vector do ponto, φ o ângulo entre o raio vector e o eixo Oz e θ o ângulo entre a projecção do raio vector sobre o plano Oxy e o eixo Ox calculado no sentido trigonométrico (no sentido contrário dos ponteiros de um relógio) (fig. 322). Tem-se, para qualquer ponto do espaço:

$$0\leqslant r<\infty,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi;\quad 0\leqslant\theta<2\pi.$$

Cortemos o domínio dado V em elementos Δv por superfícies de coordenadas $r =$ const. (semi-plano que passa pelo eixo Oz). A menos de um infinitamente pequeno de ordem superior, pode-se considerar que o domínio elementar Δv é um paralelepípedo de arestas Δr, $r\Delta\varphi$, $r \operatorname{sen} \varphi\Delta\theta$. O volume elementar exprime-se, então, (ver fig. 323):

$$\Delta v = r^2 \operatorname{sen} \varphi \, \Delta r \, \Delta\theta \, \Delta\varphi.$$

O integral triplo da função $F(\theta, r, \varphi)$ no domínio V, escreve-se

$$I = \iiint_V F(\theta, r, \varphi) \, r^2 \operatorname{sen} \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi. \qquad (1')$$

Os limites de integração são determinados pela forma do domínio V. Deduz-se, fàcilmente, da figura 323, as expressões das coordenadas cartesianas em função das coordenadas esféricas:

$$x = r \operatorname{sen} \varphi \cos\theta,$$

$$y = r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen}\theta,$$

$$z = r \cos \varphi.$$

A fórmula que permite passar de um integral em coordenadas cartesianas a um integral em coordenadas esféricas é, pois,

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \iiint_V f[r \operatorname{sen} \varphi \cos\theta, \; r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \; r \cos \varphi] \, r^2 \operatorname{sen} \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

3. *Mudança das coordenadas gerais num integral triplo* — A passagem de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas ou esféricas num integral triplo é um caso particular da transformação geral das coordenadas no espaço.

Suponhamos que as funções

$$x = \varphi(u, t, w),$$

$$y = \psi(u, t, w),$$

$$z = \chi(u, t, w)$$

representam biunìvocamente o domínio V em coordenadas cartesianas x, y, z no domínio V' em coordenadas curvilíneas u, t e w.

Suponhamos que o elemento de volume Δv do domínio V é representado pelo elemento $\Delta v'$ do correspondente domínio V' e seja

$$\lim_{\Delta v' \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta v'} = |I|.$$

Então,

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_{V'} f[\varphi(u, t, w), \psi(u, t, w), \chi(u, t, w)]\, |I|\, du\, dt\, dw.$$

Do mesmo modo que para os integrais duplos, aqui ainda I se chama *jacobiano* da transformação; do mesmo modo que para os integrais duplos, mostra-se que o jacobiano está representado pelo determinante de terceira ordem:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Assim, no caso de coordenadas cilíndricas:

$$x = \rho\cos\theta, \ y = \rho \operatorname{sen}\theta, \ z = z \ (\rho = u, \ \theta = t, \ z = w);$$

$$I = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Em coordenadas esféricas:

$$x = r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \ y = r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \ z = r\cos\varphi \ (r = u, \ \varphi = t, \ \theta = w);$$

$$I = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta & r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\operatorname{sen}\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\operatorname{sen}\varphi.$$

§ 14. Momento de inércia e coordenadas do centro de gravidade dum corpo

1. *Momento de inércia dum corpo* — Os momentos de inércia dum ponto material $M(x, y, z)$ de massa m em relação aos eixos coordenados Ox, Oy, Oz (fig. 324), exprimem-se, respectivamente, pelas fórmulas

$$I_{xx} = (y^2 + z^2)\, m,$$

$$I_{yy} = (x^2 + z^2)\, m, \ I_{zz} = (x^2 + y^2)\, m.$$

Os momentos de inércia dum corpo exprimem-se pelos integrais correspondentes. Assim, o momento de inércia dum corpo em relação ao eixo Oz exprime-se pelo integral $I_{zz} = \iiint\limits_V (x^2 + y^2) \times \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, onde $\gamma(x, y, z)$ é a densidade da matéria.

Exemplo — 1. Calcular o momento de inércia dum cilindro circular recto de altura $2h$ e de raio R em relação a um diâmetro da sua secção média, sendo a densidade γ_0 constante.

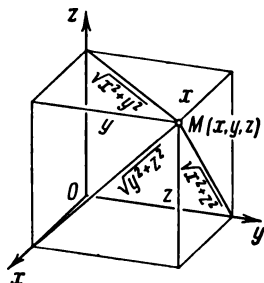



Fig. 324

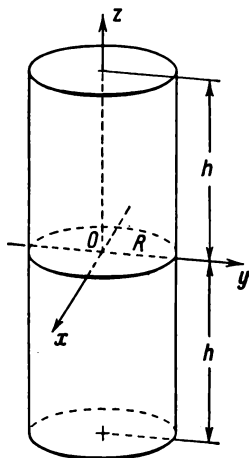



Fig. 325

Resolução — Escolhamos um sistema de coordenadas como se segue: identifiquemos o eixo Oz com o eixo do cilindro e tomemos a origem no centro de simetria (fig. 325).

O problema reside em procurar o momento de inércia do cilindro em relação ao eixo Ox:

$$I_{xx} = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\, \gamma_0\, dx\, dy\, dz.$$

Passemos a coordenadas cilíndricas:

$$I_{xx} = \gamma_0 \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^R \left[\int_{-h}^{h} (z^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta)\, dz \right] \rho\, d\rho \right\} d\theta =$$

$$= \gamma_0 \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^R \left[\frac{2h^3}{3} + 2h\rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta \right] \rho\, d\rho \right\} d\theta =$$

$$= \gamma_0 \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{2h^3}{3} \frac{R^2}{2} + \frac{2hR^4}{4} \operatorname{sen}^2 \theta \right\} d\theta =$$

$$= \gamma_0 \left[\frac{2h^3R^2}{6} 2\pi + \frac{2hR^4}{4} \pi \right] = \gamma_0 \pi h R^2 \left[\frac{2}{3} h^2 + \frac{R^2}{2} \right].$$

2. *Coordenadas do centro de gravidade dum corpo* — Tem-se fórmulas análogas às do centro de gravidade das figuras planas dadas no § 8, cap. XII, tomo I;

$$x_c = \frac{\iiint\limits_V x\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz};$$

$$y_c = \frac{\iiint\limits_V y\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz};$$

$$z_c = \frac{\iiint\limits_V z\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}$$

onde $\gamma(x, y, z)$ é a densidade.

Exemplo — 2. Determinar as coordenadas do centro de gravidade da metade superior duma esfera de raio R e de centro na origem. Considera-se constante a densidade γ_0.

Resolução — O hemisfério é limitado pelas superfícies

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \qquad z = 0.$$

A cota do centro de gravidade é dada pela fórmula

$$z_c = \frac{\iiint\limits_V z\gamma_0\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_V \gamma_0\,dx\,dy\,dz}.$$

Passando a coordenadas esféricas, tem-se:

$$z_c = \frac{\gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int\limits_0^R r \cos\varphi\, r^2 \operatorname{sen}\varphi\, dr \right] d\varphi \right\} d\theta}{\gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int\limits_0^R r^2 \operatorname{sen}\varphi\, dr \right] d\varphi \right\} d\theta} =$$

$$= \frac{2\pi \frac{R^4}{4} \frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{8} R.$$

Em virtude da simetria do hemisfério, tem-se, evidentemente, $x_c = y_c = 0$.

§ 15. Integrais que dependem dum parâmetro

Consideremos o integral seguinte, dependendo do parâmetro α:

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx.$$

(Considerámos tais integrais no § 10, cap. XI, tomo I). Indiquemos sem demonstração que se a função $f(x, \alpha)$ é contínua em relação a x no segmento $[a, b]$ e em relação a α no segmento $[\alpha_1, \alpha_2]$, a função

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

é contínua no segmento $[\alpha_1, \alpha_2]$. Poder-se-á, pois, integrar a função $I(\alpha)$ em relação a α no segmento $[\alpha_1, \alpha_2]$:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} I(\alpha)\, d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int_a^b f(x, \alpha)\, dx\right) d\alpha.$$

A expressão do segundo membro é o integral duplo de $f(x, \alpha)$ no rectângulo correspondente do plano Oxy. Pode-se inverter a ordem de integração:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\int_a^b f(x, \alpha)\, dx\right) d\alpha = \int_a^b \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha)\, d\alpha\right) dx,$$

o que mostra que basta integrar em relação ao parâmetro α sob o sinal soma. Esta fórmula serve também para o cálculo de certos integrais definidos.

Exemplo — Calcular

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx \qquad (a > 0, \quad b > 0).$$

Não se sabe calcular este integral por meio de funções elementares. Mas partamos do seguinte integral, fácil de calcular:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \qquad (\alpha > 0)$$

Integrando esta igualdade de $\alpha = a$ a $\alpha = b$, obtém-se:

$$\int_a^b \left(\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx\right) d\alpha = \int_a^b \frac{d\alpha}{\alpha} = \text{Log}\, \frac{b}{a}.$$

Mudando a ordem de integração, no primeiro membro, tem-se:

$$\int_0^\infty \left[\int_a^b e^{-\alpha x}\, d\alpha\right] dx = \text{Log}\,\frac{b}{a}\,;$$

Calculando o integral entre parêntesis rectos, obtém-se:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \text{Log}\,\frac{b}{a}\,.$$

Exercícios

Calcular os integrais (*):

1. $\int_0^1 \int_1^2 (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$ **Resp.** $\frac{8}{3}$.

2. $\int_3^4 \int_1^2 \frac{dy\, dx}{(x+y)^2}.$ **Resp.** $\text{Log}\,\frac{25}{24}$.

3. $\int_1^2 \int_x^{x\sqrt{3}} xy\, dx\, dy.$ **Resp.** $\frac{15}{4}$.

4. $\int_0^{2\pi} \int_{a\,\text{sen}\,\theta}^{a} r\, dr\, d\theta.$ **Resp.** $\frac{1}{2}\pi a^2$.

5. $\int_0^a \int_{\frac{x}{a}}^{x} \frac{x\, dy\, dx}{x^2 + y^2}.$ **Resp.** $\frac{\pi a}{4} - a\,\text{arc tg}\,\frac{1}{a}$.

6. $\int_0^a \int_{y-a}^{2y} xy\, dx\, dy.$ **Resp.** $\frac{11a^4}{24}$.

7. $\int_{\frac{b}{2}}^{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\, d\theta\, d\rho.$ **Resp.** $\frac{3}{16}\pi b^2$.

(*) Como indicamos mais acima, a ordem de integração em $\int_M^N \int_K^L f(x, y)\, dx\, dy$ é a dos diferenciais, isto é, que

$$\int_M^N \int_K^L f(x, y)\, dx\, dy = \int_M^N \left(\int_K^L f(x, y)\, dx\right) dy.$$

Definir os limites de integração para o integral $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$, *sendo o domínio limitado pelas curvas:*

8. $x=2,\ x=3,\ y=-1,\ y=5.$ Resp. $\int_2^3\int_{-1}^5 f(x, y)\,dy\,dx.$

9. $y=0,\ y=1-x^2.$ Resp. $\int_{-1}^1\int_0^{1-x^2} f(x, y)\,dy\,dx.$

10. $x^2+y^2=a^2.$ Resp. $\int_{-a}^a\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx.$

11. $y=\frac{2}{1+x^2},\ y=x^2.$ Resp. $\int_{-1}^1\int_{x^2}^{\frac{2}{1+x^2}} f(x, y)\,dy\,dx.$

12. $y=0,\ y=a,\ y=x,\ y=x-2a.$ Resp. $\int_0^a\int_y^{y+2a} f(x, y)\,dx\,dy.$

Inverter a ordem de integração nos seguintes integrais:

13. $\int_1^2\int_3^4 f(x, y)\,dy\,dx.$ Resp. $\int_3^4\int_1^2 f(x, y)\,dx\,dy.$

14. $\int_0^1\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy\,dx.$ Resp. $\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y)\,dx\,dy.$

15. $\int_0^a\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x, y)\,dx\,dy.$ Resp. $\int_0^a\int_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^a f(x, y)\,dy\,dx.$

16. $\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx.$ Resp. $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx\,dy.$

17. $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,dx\,dy.$ Resp. $\int_{-1}^0\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx+$

$$+\int_0^1\int_0^{1-x} f(x, y)\,dy\,dx.$$

Calcular os seguintes integrais passando a coordenadas polares:

18. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dy\, dx.$ Resp. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \sqrt{a^2-\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{6} a^3.$

19. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$ Resp. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \rho^3\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi a^4}{8}$

20. $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dy\, dx.$ Resp. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{4}.$

21. $\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy\, dx.$ Resp. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi a^2}{2}.$

Transformar os seguintes integrais duplos introduzindo as novas variáveis u *e* v, *ligadas pelas fórmulas* x = u − uv, y = uv:

22. $\int_0^e \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\, dy\, dx.$ Resp. $\int_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}} \int_0^{\frac{e}{1-v}} f(u - uv, uv)\, u\, du\, dv.$

23. $\int_0^c \int_0^b f(x, y)\, dy\, dx.$ Resp. $\int_0^{\frac{b}{b+c}} \int_0^{\frac{c}{1-v}} f(u - uv, uv)\, u\, du\, dv +$

$$+ \int_{\frac{b}{b+c}}^{1} \int_0^{\frac{b}{v}} f(u - uv, uv)\, u\, du\, dv.$$

Aplicação do integral duplo ao cálculo das áreas

24. Calcular a área da figura limitada pela parábola $y^2 = 2x$ e a recta $y = x$. Resp. $\frac{2}{3}$.

25. Calcular a área da figura limitada pelas cuvas $y^2 = 4ax$, $x + y = 3a$, $y = 0$. Resp. $\frac{10}{3} a^2$.

26. Calcular a área da figura limitada pelas curvas $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$, Resp. $\frac{a^2}{3}$.

27. Calcular a área da figura limitada pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$. Resp. $\sqrt{2}-1$.

28. Calcular a área do arco da curva $\rho = a \operatorname{sen} 2\theta$. Resp. $\frac{\pi a^2}{8}$.

29. Calcular a área limitada pela lemniscata $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$. Resp. a^2.

30. Calcular a área da «boucle» da curva $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{2xy}{c^2}$.

Indicação — Passar as novas coordenadas $x = \rho a \cos\theta$ e $y = \rho b \operatorname{sen}\theta$. Resp. $\frac{a^2b^2}{c^2}$.

Cálculo de volumes

Calcular os volumes dos corpos limitados:

31. Pelas superfícies $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$. Rép. $\frac{abc}{6}$.

32. $z=0$, $x^2+y^2=1$, $x+y+z=3$. Resp. 3π.

33. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $xy=z$, $z=0$. Resp. π.

34. $x^2+y^2-2ax=0$, $z=0$, $x^2+y^2=z^2$. Resp. $\frac{32}{9}a^3$.

35. $y=x^2$, $x=y^2$, $z=0$, $z=12+y-x^2$. Resp. $\frac{549}{140}$.

36. Pelos planos coordenados, o plano $2x + 3y - 12 = 0$ e o cilindro $z=\frac{1}{2}y^2$. Resp. 16.

37. Pelo cilindro circular recto de raio a e cujo eixo se identifica com Oz, os planos coordenados e o plano $\frac{x}{a}+\frac{z}{a}=1$. Resp. $a^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)$.

38. Pelos cilindros $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$. Rép. $\frac{16}{3}a^3$.

39. $y^2+z^2=x$, $x=y$, $z=0$. Resp. $\frac{\pi}{64}$.

40. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=R^2$, $a>R$. Resp. $\frac{4}{3}\pi\,[a^3-(\sqrt{a^2-R^2})^3]$.

41. $az=x^2+y^2$, $z=0$, $x^2+y^2=2ax$. Resp. $\frac{3}{2}\pi a^3$.

42. $\rho^2=a^2\cos 2\theta$, $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z=0$. (Calcular o volume interior do cilindro.) Resp. $\frac{1}{9}a^3(3\pi+20-16\sqrt{2})$.

Áreas de superfícies

43. Calcular a área da parte do cone $x^2 + y^2 = z^2$ cortada pelo cilindro $x^2+y^2=2ax$. Resp. $2\pi a^2\sqrt{2}$.

44. Calcular a área da parte do plano $x + y + z = 2a$ que se encontra no primeiro triedro formado pelos eixos coordenados e limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Resp. $\frac{\pi a^2}{4}\sqrt{3}$.

Resp.

45. Calcular a área do segmento esférico (do pequeno), sendo o raio da esfera a e o raio da base do segmento b. Resp. $2\pi(a^2 - a\sqrt{a^2 - b^2})$.

46. Calcular a área da parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que é cortada pelo cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$. Resp. $4\pi a^2 - 8a^2 - \text{arc sen}\,\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

47. Achar a área da superfície do corpo que é formado pela intersecção de dois cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$. Resp. $16a^2$.

48. Calcular a área da parte da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ compreendida entre o plano $z = 0$ e o cone $x^2 + y^2 = z^2$. Resp. $8a^2$.

49. Calcular a área da parte da superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = a^2$ compreendida entre os planos $z = mx$ e $z = 0$. Resp. $2ma^2$.

50. Calcular a área da parte do parabolóide $x^2 + z^2 = 2ax$ compreendida entre o cilindro parabólico $y^2 = ax$ e o plano $x = a$. Resp. $\frac{1}{3}\pi a^2(3\sqrt{3} - 1)$.

Massas, centro de gravidade e momento de inércia de figuras planas

(Suporemos, nos problemas 51 a 62 e no problema 64, que a densidade superficial é constante e igual a 1)

51. Qual é a massa de um disco circular de raio a sabendo que a densidade em cada ponto P é inversamente proporcional à distância ao centro (designar-se-á por K o coeficiente de proporcionalidade). Resp. $\pi a K$.

52. Calcular as coordenadas do centro de gravidade dum triângulo equilátero. Identificar-se-á o eixo Ox com a altura e o vértice com a origem. Resp. $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $y = 0$.

53. Encontrar as coordenadas do centro de gravidade dum sector circular de raio a. Identificar-se-á a bissectriz do ângulo ao centro (2α) com o eixo Ox. Resp. $x_c = \frac{2a \text{ sen } \alpha}{3\alpha}$, $y_c = 0$.

54. Encontrar as coordenadas do centro de gravidade do semi-círculo superior da equação $x^2 + y^2 = a^2$. Resp. $x_c = 0$, $y_c = \frac{4a}{3\pi}$.

55. Determinar as coordenadas do centro de gravidade da área definida por um arco de cicloide $x = a(t - \text{sen } t)$, $y = a(1 - \cos t)$. Resp. $x_c = a\pi$, $y_c = \frac{5a}{6}$.

56. Determinar as coordenadas do centro de gravidade da área da «boucle» da curva $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$. Resp. $x_c = \frac{\pi a\sqrt{2}}{8}$, $y_c = 0$.

57. Achar as coordenadas do centro de gravidade da área interior à cardióide $\rho = a(1 + \cos\theta)$. Resp. $x_c = \frac{5a}{6}$, $y_c = 0$.

58. Calcular o momento de inércia da área do rectângulo limitado pelas rectas $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ em relação à origem de coordenadas. Resp. $\frac{ab(a^2 + b^2)}{3}$.

59. Calcular o momento de inércia da elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

a) em relação ao eixo Oy;
b) em relação à origem de coordenadas.

Resp. *a*) $\frac{\pi a^3 b}{4}$; *b*) $\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$.

60. Calcular o momento de inércia do círculo cheio $\rho = 2a\cos\theta$ em relação ao pólo. Resp. $\frac{3}{2}\pi a^4$.

61. Calcular o momento de inércia da área da cardióide $\rho = a(1-\cos\theta)$ em relação ao pólo. Resp. $\frac{35\pi a^4}{16}$.

62. Calcular o momento de inércia do disco $(x-a)^2+(y-b)^2=2a^2$ em relação ao eixo Oy. Resp. $3\pi a^4$.

63. A densidade em cada ponto duma placa quadrada de lado a proporcional à distância deste ponto a um vértice do quadrado. Calcular o momento de inércia da placa em relação a um lado que passa por aquele vértice. Resp. $\frac{1}{40}ka^5[7\sqrt{2}+3\operatorname{Log}(\sqrt{2}+1)]$, onde k é o coeficiente de proporcionalidade.

64. Calcular o momento de inércia da área da figura limitada pela parábola $y^2 = ax$ e a recta $x = a$ em relação à recta $y = -a$. Resp. $\frac{8}{5}a^4$.

Integrais triplos

65. Calcular $\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$ sabendo que o domínio de integração é limitado pelos planos coordenados e o plano $x+y+z=1$.
Resp. $\frac{\operatorname{Log} 2}{2}-\frac{5}{16}$.

66. Calcular $\int_0^a\left\{\int_0^x\left[\int_0^y xyz\,dz\right]dy\right\}dx$. Resp. $\frac{a^6}{48}$.

67. Calcular o volume do corpo limitado pela esfera $x^2+y^2+z^2=4$ e o parabolóide $x^2+y^2=3z$. Resp. $\frac{19}{6}\pi$.

68 (*) Calcular as coordenadas do centro de gravidade e os momentos de inércia da pirâmide formada pelos planos $x=0$, $y=0$, $z=0$; $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.
Resp. $x_c=\frac{a}{4}$, $y_c=\frac{b}{4}$, $z_c=\frac{c}{4}$; $I_x=\frac{a^3bc}{60}$, $I_y=\frac{b^3ac}{60}$, $I_z=\frac{c^3ab}{60}$, $I_0=$ $=\frac{abc}{60}(a^2+b^2+c^2)$.

69. Calcular o momento de inércia dum cone circular recto em relação ao seu eixo. Resp. $\frac{1}{10}\pi hr^4$, onde h é a altura e r o raio do círculo da base.

(*) Nos problemas 68, 69, 72 e 73 supõe-se que a densidade é constante e igual à unidade.

70. Calcular o volume limitado pela superfície de equação $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$. Resp. $\frac{1}{3}\pi a^3$.

71. Calcular o momento de inércia dum cone circular em relação ao diâmetro da sua base. Resp. $\frac{\pi h r^2}{60}(2h^2+3r^2)$.

72. Calcular as coordenadas do centro de gravidade limitado por uma esfera de raio a e um cone de ângulo no vértice 2α, coincidindo o vértice com o centro da esfera. Resp. $x_C=0$, $y_C=0$, $z_C=\frac{3}{8}a(1+\cos\alpha)$ (identificou-sei o eixo do cone com o eixo Oz e colocou-se o vértice na origem).

73. Calcular as coordenadas do centro de gravidade do corpo limitado por uma esfera de raio a e por dois planos que passam pelo centro e formam um ângulo de 60°. Resp. $\rho=\frac{9}{16}a$, $\theta=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (a recta de intersecção dos planos foi tomada para o eixo Oz, o centro da esfera serviu de origem de coordenadas esféricas ρ, θ, φ).

74. Sirva-se da igualdade $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2 x}\,d\alpha$ $(\alpha>0)$, para calcular os integrais $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}$ e $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\sqrt{x}}$. Resp. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Capítulo XV

INTEGRAIS CURVILÍNEOS E INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

§ 1. Integral curvilíneo

Consideremos um ponto $P(x, y)$ movendo-se sobre uma curva plana L dum ponto M a um ponto N. O ponto P é solicitado por uma força $\boldsymbol{F}$ que varia em grandeza e em direcção quando P se desloca, isto é, que ela é uma função das coordenadas de P:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(P).$$

Calculemos o trabalho A da força quando o ponto é deslocado de M para N (fig. 326). Cortemos para esse efeito a curva MN em n partes arbitrárias pelos pontos $M_0 = M$, M_1, M_2, ..., $M_n = N$ par-

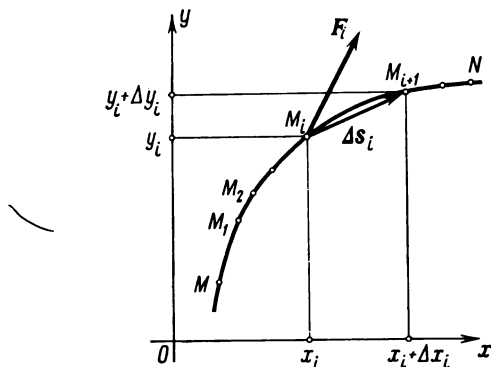



Fig. 326

tindo de M para N e designemos por $\Delta \boldsymbol{s}_i$ o vector $\overline{M_i M_{i+1}}$. Designemos por $\boldsymbol{F}_i$ a intensidade da força $\boldsymbol{F}$ no ponto M_i. Pode-se, então, considerar que o produto escalar $\boldsymbol{F}_i \Delta \boldsymbol{s}_i$ representa aproximadamente o trabalho $\boldsymbol{F}$ ao longo do arco $\widehat{M_i M_{i+1}}$:

$$A_i \approx \boldsymbol{F}_i \Delta \boldsymbol{s}_i.$$

Seja

$$\boldsymbol{F} = X(x, y)\,\boldsymbol{i} + Y(x, y)\,\boldsymbol{j},$$

em que $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ são as projecções do vector $\boldsymbol{F}$ sobre os eixos Ox e Oy. Designando por Δx_i e Δy_i os acréscimos das coordenadas x_i e y_i quando se passa de M_i a M_{i+1}, obtém-se:

$$\Delta \boldsymbol{s}_i = \Delta x_i \boldsymbol{i} + \Delta y_i \boldsymbol{j}.$$

Por conseguinte,

$$\boldsymbol{F}_i \Delta \boldsymbol{s}_i = X(x_i, y_i)\Delta x_i + Y(x_i, y_i)\Delta y_i.$$

O valor aproximado do trabalho A da força $\boldsymbol{F}$ ao longo da curva MN é

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \Delta \boldsymbol{s}_i = \sum_{i=1}^{n} [X(x_i, y_i)\Delta x_i + Y(x_i, y_i)\Delta y_i]. \qquad (1)$$

Sem fazer racioeínios rigorosos, indiquemos atendendo que se o limite da expressão do segundo membro existe quando $\Delta \boldsymbol{s}_i \to 0$ (é, então, evidente que $\Delta x_i \to 0$ e $\Delta y_i \to 0$), ele exprime o trabalho da força $\boldsymbol{F}$ ao longo da curva L entre os pontos M e N:

$$A = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} [X(x_i, y_i)\Delta x_i + Y(x_i, y_i)\Delta y_i]. \qquad (2)$$

O limite (*) do segundo membro chama-se *integral curvilíneo* de $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ ao longo da curva L e é designado por

$$A = \int_L X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy \qquad (3)$$

ou

$$A = \int_{(M)}^{(N)} X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy. \qquad (3')$$

Encôntra-se muitas vezes limites de somas (2) em matemáticas e física, sendo $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ funções de duas variáveis no domínio D.

As letras M e N no integral (3′) foram postos entre parêntesis para indicar que não são números mas os extremos da curva na qual é estendido o integral curvilíneo. O sentido de M e N ao longo da curva diz-se sentido de integração.

---

* Dá-se aqui ao limite da soma integral o mesmo sentido que para o integral definido, ver § 2, Cap. XI, t. I.

Se L é uma curva empenada, define-se duma maneira análoga o integral curvilíneo das três funções $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$

$$\int_L X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_k \to 0 \\ \Delta y_k \to 0 \\ \Delta z_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} X(x_k, y_k, z_k)\,\Delta x_k + Y(x_k, y_k, z_k)\,\Delta y_k +$$

$$+ Z(x_k, y_k, z_k)\,\Delta z_k.$$

A letra L sob o sinal soma indica que o integral é estendido à curva L.

Indiquemos duas propriedades do integral curvilíneo.

Propriedade — 1. Um integral curvilíneo é definido pela expressão sob o sinal soma, a forma da curva de integração e o sentido de integração.

O integral curvilíneo muda de sinal ao mesmo tempo que o sentido de integração, dado que o vector Δs e, por conseguinte, as suas projecções Δx e Δy mudam de sinal.

Propriedade — 2. Cortemos a curva L em duas partes L_1 e L_2 de modo que $\widehat{MN} = \widehat{MK} + \widehat{KN}$ (fig. 327). Resulta, então, directamente da fórmula (1)

$$\int_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy = \int_{(M)}^{(K)} X\,dx +$$

$$+ Y\,dy + \int_{(K)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy.$$

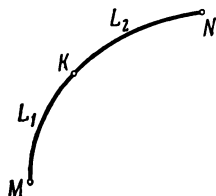



Fig. 327

Esta relação é válida qualquer que seja o número de arcos parciais.

Indiquemos ainda que o integral curvilíneo conserva o seu sentido quando a curva L é fechada.

A origem e a extremidade da curva coincidem, então. Já não se pode escrever no caso duma curva fechada $\int_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy$, mas $\int_L X\,dx + Y\,dy$ e será preciso indicar, forçosamente, o *sentido de percurso* ao longo da curva fechada L. Designa-se também frequentemente um integral curvilíneo sobre uma *curva fechada* L pelo símbolo

$$\oint_L X\,dx + Y\,dy.$$

Nota — Fomos conduzidos à noção de integral curvilíneo considerando o problema do trabalho duma força F sobre um percurso curvilíneo L.

Considerava-se, então, que a força F era uma função vectorial das coordenadas do ponto de aplicação (x, y); as projecções do vector variável F sobre os eixos de coordenadas são iguais às funções escalares (isto é, numéricas) $X(x, y)$ e $Y(x, y)$. Pode-se, pois considerar um integral curvilíneo da forma $\int_L X\,dx + Y\,dy$ como integral da função *vectorial* F dada pelas suas componentes X e Y.

O integral da função vectorial F sobre a curva L é designado pelo símbolo

$$\int_L F\,ds.$$

Se o vector F é determinado pelas suas componentes X, Y, Z, este integral escreve-se

$$\int_L X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Em especial, se o vector se encontra no plano Oxy, o integral deste vector reduz-se, então, a

$$\int_L X\,dx + Y\,dy.$$

Quando o integral curvilíneo duma função vectorial é estendido a uma curva fechada L, chama-se ainda a *circulação* do vector F sobre o contorno fechado L.

§ 2. Cálculo do integral curvilíneo

Propomo-nos, neste parágrafo, precisar a noção de limite da soma (1) § 1 e, do mesmo modo, teremos precisada a noção do integral curvilíneo e indicaremos um processo de cálculo.

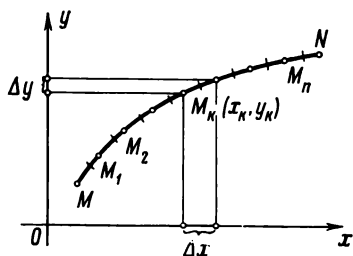
Suponhamos a curva L dada sob a forma paramétrica:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Consideremos o arco de curva MN (fig. 328). Sejam α e β os valores do parâmetro correspondente nos pontos M e N. Dividamos o arco MN em partes Δs_i pelos pontos $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n)$ e façamos $x_i = \varphi(t_i)$, $y_i = \psi(t_i)$.

Fig. 328

Consideremos o integral curvilíneo definido no parágrafo anterior

$$\int_L X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy. \tag{1}$$

Enunciemos, sem demonstrar, *um teorema sobre a existência dos integrais curvilíneos. Se as funções $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ forem contínuas e possuirem derivadas contínuas $\varphi'(t)$ e $\psi'(t)$ sobre o segmento $[\alpha, \beta]$ e se as funções de t* $X[\varphi(t), \psi(t)]$ e $Y[\varphi(t), \psi(t)]$ *forem contínuas sobre segmento, os limites existem,*

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta x_i &= \int X(x, y)\,dx, \\ \lim_{\Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Y(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta y_i &= \int Y(x, y)\,dy \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

sendo $\bar{x}_i$ e $\bar{y}_i$ as coordenadas dum ponto do arco Δs_i. Estes limites que não dependem do modo da decomposição da curva em arcos parciais Δs_i quando $\Delta s_i \to 0$, nem da escolha do ponto $\bar{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ sobre o arco Δs_i, chamam-se *integrais curvilíneos* e designa-se-los por

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta x_i = \int_L X(x, y)\,dx,$$

$$\lim_{\Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Y(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta y_i = \int_L Y(x, y)\,dy.$$

Nota — Resulta do teorema que tendem também para este mesmo limite (isto é, para o integral curvilíneo) as somas definidas no parágrafo anterior, onde os pontos $\bar{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ são as extremidades do arco Δs_i, sendo arbitrária a decomposição de L em arcos parciais.

O teorema que acaba de ser formulado dá um processo de cálculo dos integrais curvilíneos.

Assim, por definição:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta x_i, \tag{3}$$

onde

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}).$$

Apliquemos a fórmula dos acréscimos finitos de Lagrange

$$\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)\,\Delta t_i,$$

sendo τ_i um certo valor de t compreendido entre os valores t_{i-1} e t_i. Sendo o ponto $\bar{x}_i, \bar{y}_i$ arbitrário sobre o arco Δs_i, escolhamo-lo por forma a que as suas coordenadas correspondam ao valor do parâmetro τ_i:

$$\bar{x}_i = \varphi(\tau_i), \qquad \bar{y}_i = \psi(\tau_i).$$

Substituindo os valores encontrados de $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ e Δx_i na fórmula (3), encontra-se:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y)\, dx = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X[\varphi(\tau_i)\, \psi(\tau_i)]\, \varphi'(\tau_i)\, \Delta t_i.$$

O segundo membro representa o limite de uma soma integral para a função contínua de uma só variável $X[\varphi(t), \psi(t)]\, \varphi'(t)$ sobre o segmento $[\alpha, \beta]$.

Por conseguinte, este limite é igual ao integral definido desta função:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t), \psi(t)]\, \varphi'(t)\, dt.$$

Duma maneira análoga, obtém-se a fórmula

$$\int_{(M)}^{(N)} Y(x, y)\, dy = \int_{\alpha}^{\beta} Y[\varphi(t), \psi(t)]\, \psi'(t)\, dt.$$

Somando membro a membro estas igualdades, obtém-se:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{X[\varphi(t), \psi(t)]\, \varphi'(t) + Y[\varphi(t), \psi(t)]\, \psi'(t)\}\, dt. \tag{4}$$

Tal é a fórmula que permite calcular um integral curvilíneo.

Calcula-se do mesmo modo o integral curvilíneo

$$\int X\, dx + Y\, dy + Z\, dz$$

ao longo duma curva empenada definida paramètricamente: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$.

Exemplo — 1. Calcular o integral curvilíneo a respeito das funções x^3, $3zy^2 - x^2y$ (isto é, sobre a função vectorial $x^3\mathbf{i} + 3zy^2\mathbf{j} - x^2y\mathbf{k}$) ao longo do segmento de recta que vai do ponto $M(3, 2, 1)$ ao ponto $N(0, 0, 0)$ (fig. 329).

Resolução — Para encontrar as equações paramétricas da recta de integração, escrevamo-la sob a forma:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1};$$

Designando por t o valor comum destas relações, obtém-se a equação paramétrica da recta:

$$x = 3t, \quad y = 2t, \quad z = t.$$

Corresponde à origem do segmento MN o valor do parâmetro $t = 1$ e à extremidade o valor $t = 0$. Encontra-se, fàcilmente, as derivadas de x, y, z

em relação a t (tem-se necessidade para calcular o integral curvilíneo):

$$x'_t = 3, \quad y'_t = 2, \quad z'_t = 1.$$

Calcula-se, agora, o integral curvilíneo proposto com a ajuda da fórmula (4):

$$\int_{(M)}^{(N)} x^3\,dx + 3zy^2\,dy - x^2y\,dz = \int_1^0 [(3t)^3 \cdot 3 + 3t\,(2t)^2 \cdot 2 -$$

$$- (3t)^2 \cdot 2t \cdot 1]\,dt = \int_1^0 87t^3\,dt = -\frac{87}{4}.$$

Exemplo — Calcular o integral curvilíneo para o par de funções $6x^2y$, $10xy^2$ sobre a curva plana $y = x^3$ entre os pontos $M\,(1, 1)$ e $N\,(2, 8)$ (fig 330).

Resolução — Para calcular o integral proposto

$$\int_{(M)}^{(N)} 6x^2y\,dx + 10xy^2\,dy$$

é preciso ter as equações paramétricas da curva. É evidente que aqui x pode servir de parâmetro

$$x = x, \quad y = x^3.$$

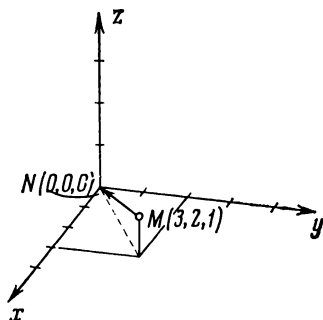



Fig. 329

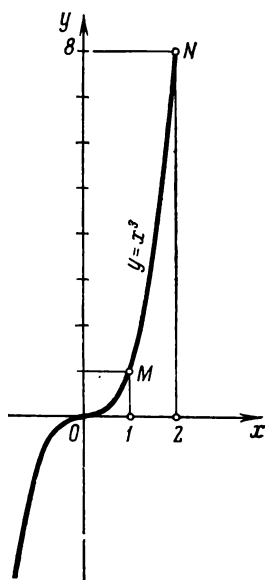



Fig. 330

O parâmetro x varia de $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$. As expressões das derivadas em relação ao parâmetro são:

$$x'_x = 1, \quad y'_x = 3x^2.$$

Por conseguinte,

$$\int_{(M)}^{(N)} 6x^2y\,dx + 10xy^2\,dy = \int_1^2 [6x^2x^3 \cdot 1 + 10xx^6 \cdot 3x^2]\,dx =$$

$$= \int_1^2 (6x^5 + 30x^9)\,dx = [x^6 + 3x^{10}]_1^2 = 1084.$$

Vamos dar, agora, algumas aplicações dos integrais curvilíneos.

1. *Expressão da área dum domínio limitado por uma curva em função dum integral curvilíneo* — Seja dado no plano Oxy um domínio D limitado por uma contorno L tal que qualquer paralela a qual-

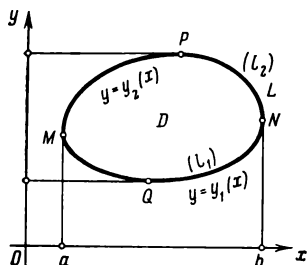



Fig. 331

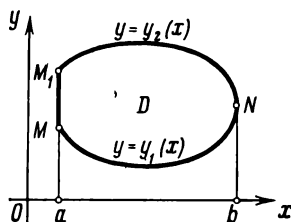



Fig. 332

quer dos eixos coordenados que passa por um ponto interior do domínio corte a fronteira L em dois pontos no máximo (isto é, que o domínio é regular) (fig. 331).

Seja $[a, b]$ o segmento do eixo Ox sobre o qual se projecta o domínio D, limitado interiormente pela curva (l_1):

$$y = y_1(x),$$

e, superiormente, pela curva (l_2):

$$y = y_2(x),$$

$$[y_1(x) \leqslant y_2(x)].$$

A área do domínio D é, então, igual a

$$S = \int_a^b y_2(x)\,dx - \int_a^b y_1(x)\,dx.$$

Mas o primeiro integral é um integral curvilíneo ao longo da curva l_2 $(\widehat{MPN})$, dado que $y = y_2(x)$ é a equação desta curva; por conseguinte:

$$\int_a^b y_2(x)\,dx = \int_{MPN} y\,dx.$$

O segundo integral é um integral curvilíneo estendido à curva $l_1\ (\widehat{MQN})$:

$$\int_a^b y_1(x)\,dx = \int_{MQN} y\,dx.$$

Em virtude da propriedade 1 dos integrais curvilíneos, tem-se:

$$\int_{MPN} y\,dx = -\int_{NPM} y\,dx.$$

Por conseguinte,

$$S = -\int_{NPM} y\,dx - \int_{MQN} y\,dx = -\int_L y\,dx, \tag{5}$$

sendo L percorrido *no sentido inverso dos ponteiros dum relógio.*

Se uma parte da fronteira L é constituída por um segmento M_1M paralelo ao eixo Oy, tem-se $\int_{(M_1)}^{(M)} y\,dx = 0$ e a igualdade (5) é, ainda, verdadeira (fig. 332).

Pode-se mostrar duma maneira análoga que

$$S = \int_L x\,dy. \tag{6}$$

Juntando membro a membro (5) e (6) e dividindo por 2, obtém-se ainda uma fórmula para calcular a área S:

$$S = \frac{1}{2}\int_L x\,dy - y\,dx. \tag{7}$$

Exemplo — 3. Calcular a área da elipse

$$x = a\cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t.$$

Resolução — De acordo com a fórmula (7), encontra-se:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a\cos t\, b\cos t - b\operatorname{sen} t\,(-a\operatorname{sen} t)]\,dt = \pi ab.$$

Notemos que a fórmula (7) bem como as fórmulas (5) e (6) se aplicam também para a área de domínios cujas fronteiras são cortadas pelas paralelas aos eixos de coordenadas em mais de dois pontos (fig. 333). Para o demonstrar, partamos o domínio dado (fig. 333) em dois domínios regulares por meio da curva l^*. A fórmula (7) é verdadeira para cada um deles. Juntando membro a membro, obtém-se no primeiro membro a área do domínio dado e no segundo o integral curvilíneo (precedido do coeficiente ½) estendido a toda a fronteira, dado que o integral sobre a linha de divisão l^* é tomada duas vezes, no sentido directo e no sentido inverso, e anula-se, portanto.

2. *Trabalho duma força variável F sobre um caminho curvilíneo L* — Indicamos no começo do § 1, que o trabalho de uma força $F = X(x, y, z)\,\mathbf{i} + Y(x, y, z)\,\mathbf{j} + Z(x, y, z)\,\mathbf{k}$ ao longo duma curva $L = MN$ era igual ao integral curvilíneo:

$$A = \int_{(M)}^{(N)} X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz.$$

Tomemos um exemplo concreto do cálculo do trabalho de uma força.

Exemplo — 4. Calcular o trabalho A da força de gravidade F que desloca uma massa m do ponto $M_1(a_1, b_1, c_1)$ ao ponto $M_2(a_2, b_2, c_2)$ ao longo do caminho arbitrário L (fig. 334).

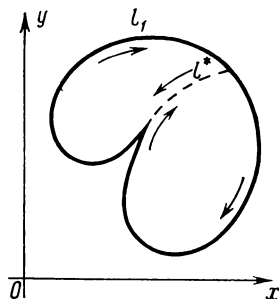



Fig. 333

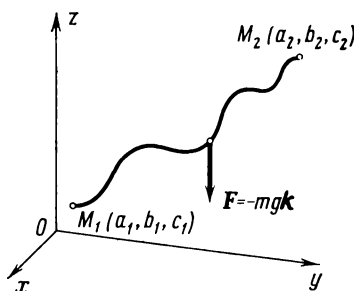



Fig. 334

Resolução — As projecções da força de gravidade F sobre os eixos de coordenadas são

$$X = 0, \ Y = 0, \ Z = -mg.$$

O trabalho executado é, pois,

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int_{c_1}^{c_2} (-mg)\,dz = mg\,(c_1 - c_2).$$

Vê-se que, no campo da gravidade, o trabalho não depende do caminho seguido, mas sòmente do ponto inicial e do ponto final. Mais exactamente, o trabalho da força de gravidade apenas depende da diferença dos níveis determinados pelo ponto final e o ponto inicial.

§ 3. Fórmula de Green

Mostremos que um integral duplo num domínio plano D exprime-se por um integral curvilíneo tomado ao longo da fronteira L deste domínio.

Seja D um domínio do plano Oxy limitado pelo contorno L, sendo D regular, quer em relação a Ox quer em relação a Oy.

Suponhamos este domínio limitado inferiormente pela curva $y = y_1(x)$ e superiormente pela curva $y = y_2(x)$, $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ (fig. 331).

Conjuntamente, estas curvas formam o contorno fechado L. Sejam em D duas funções contínuas $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ dotadas de derivadas parciais contínuas. Consideremos o integral

$$\iint_D \frac{\partial X(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy.$$

Tem-se:

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y}\, dy \right) dx = \int_a^b X(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx =$$

$$= \int_a^b [X(x, y_2(x)) - X(x, y_1(x))]\, dx. \tag{1}$$

Notemos que o integral

$$\int_a^b X(x, y_2(x))\, dx$$

é numèricamente igual ao integral curvilíneo

$$\int_{(MPN)} X(x, y)\, dx,$$

ao longo da curva *MPN* de equações paramétricas

$$x = x, \quad y = y_2(x),$$

sendo x o parâmetro.

Então, tem-se

$$\int_a^b X(x, y_2(x))\, dx = \int_{MPN} X(x, y)\, dx. \tag{2}$$

De maneira análoga, o integral

$$\int_a^b X(x, y_1(x))\, dx$$

é numèricamente igual a

$$\int_a^b X(x, y_1(x))\, dx = \int_{(MQN)} X(x, y)\, dx. \tag{3}$$

Substituindo as expressões (2) e (3) na fórmula (1), obtém-se:

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{MPN} X(x, y)\, dx - \int_{MQN} X(x, y)\, dx. \tag{4}$$

Ora,

$$\int_{MQN} X(x,\ y)\,dx = -\int_{NQM} X(x,\ y)\,dx$$

(ver § 1, propriedade 1). Pode-se, pois, recopiar a fórmula (4) sob a forma:

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{MPN} X(x,\ y)\,dx + \int_{NQM} X(x,\ y)\,dx.$$

Mas a soma dos integrais curvilíneos do segundo membro é igual ao integral curvilíneo sobre o contorno L completamente percorrido no sentido dos ponteiros dum relógio. Pode-se, pois, pôr esta igualdade sob a forma

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy = \int_L X(x,\ y)\,dx, \tag{5}$$

onde L indica que o contorno fechado L é percorrido no sentido dos ponteiros dum relógio.

Se uma parte da fronteira é constituída por um segmento l_3 paralelo ao eixo Oy, tem-se $\int_{l_3} X(x,\ y)\,dx = 0$ e a igualdade (5) permanece verdadeira.

Do mesmo modo se encontra:

$$\iint_D \frac{\partial Y}{\partial x}\,dx\,dy = -\int_L Y(x,\ y)\,dy. \tag{6}$$

Deduzindo (6) de (5), encontra-se:

$$\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dx\,dy = \int_L X\,dx + Y\,dy.$$

Se se percorrer o contorno L no sentido inverso dos ponteiros de um relógio, tem-se (*)

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_L X\,dx + Y\,dy.$$

É a *fórmula de Green* (matemático inglês, 1793-1841) (**).

(*) Quando num integral curvilíneo sobre um contorno fechado L, não se indica o sentido de integração, subentende-se que se trata do sentido inverso dos ponteiros dum relógio. Se o percurso tiver lugar no sentido dos ponteiros, é preciso ter cuidado em especificá-lo.

(**) Esta fórmula é um caso particular duma fórmula mais geral estabelecida pelo matemático russo M. Ostrogradsky.

Suposemos o domínio D regular. Mas, tal como para o cálculo duma área (ver §2), pode-se mostrar que esta fórmula permanece verdadeira para qualquer domínio que admita um corte regular

§ 4. Condições para que um integral curvilíneo não dependa do caminho de integração

Consideremos o integral curvilíneo

$$\int_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy,$$

estendido a uma curva plana L que reúne os pontos M e N Supor-se-á que as funções $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ possuem derivadas parciais contínuas no domínio D. Vejamos em que condições o integral curvilíneo não depende da forma da curva L, mas sòmente da posição dos pontos M e N.

Consideremos essas curvas arbitrárias MPN e MQN do domínio considerado D reunindo os pontos M e N (fig. 335).

Seja

$$\int_{MPN} X\,dx + Y\,dy = \int_{MQN} X\,dx + Y\,dy, \tag{1}$$

isto é,

$$\int_{MPN} X\,dx + Y\,dy - \int_{MQN} X\,dx + Y\,dy = 0.$$

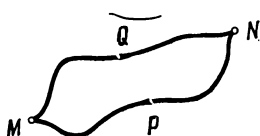
Em virtude das propriedades 1 e 2 dos integrais curvilíneos (§ 1), pode-se escrever

$$\int_{MPN} X\,dx + Y\,dy + \int_{NQM} X\,dx + Y\,dy = 0,$$

Fig. 335

que representa o integral curvilíneo sobre o contorno fechado L

$$\int_{L} X\,dx + Y\,dy = 0. \tag{2}$$

Nesta última fórmula, o integral curvilíneo é tomado sobre um contorno L, constituído pelas curvas MPN e NQM. É evidente que este contorno pode ser considerado como arbitrário.

Por conseguinte, resulta da condição de o integral sobre uma curva que reúne dois pontos arbitrários M e N não depender do caminho seguido, mas sòmente destes dois pontos, que *este integral é nulo sobre qualquer contorno fechado.*

O recíproco é verdadeiro: se um integral curvilíneo é nulo qualquer que seja o contorno fechado, não depende do caminho de

integração entre dois pontos, *mas sòmente da posição destes dois pontos*. Com efeito, a igualdade (2) implica (1).

No exemplo 4 do § 2 o integral curvilíneo não depende do caminho de integração: no exemplo 3 depende do caminho, dado que o integral sobre o contorno fechado considerado não é nulo, mas dá a área limitada por este contorno; nos exemplos 1 e 2 os integrais curvilíneos dependem igualmente do caminho de integração.

Põe-se, naturalmente, a pergunta: a que condições devem satisfazer as funções $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ para que o integral curvilíneo $\int X\,dx + Y\,dy$ seja nulo qualquer que seja o contorno fechado?

O teorema seguinte responde a esta pergunta.

Teorema — *Sejam $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ duas funções contínuas num domínio D, bem como as suas derivadas parciais* $\frac{\partial X(x,y)}{\partial y}$ *e* $\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}$ *Para que o integral curvilíneo sobre qualquer contorno fechado L deste domínio seja nulo, isto é, para que se tenha*

$$\int_L X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy = 0, \tag{2'}$$

é necessário e suficiente que

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \tag{3}$$

em todos os pontos do domínio D.

Demonstração — Tomemos um contorno fechado arbitrário L num domínio D e escrevamos a fórmula de Green correspondente a este contorno:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_L X\,dx + Y\,dy.$$

Se a condição (3) for satisfeita, o integral duplo da esquerda é idênticamente nulo e tem-se

$$\int_L X\,dx + Y\,dy = 0.$$

Demonstrou-se, pois, que a condição (3) é *suficiente.*

Mostremos que ela é necessária, isto é, que se a igualdade (2') tiver lugar para qualquer contorno fechado L em D, a condição (3) tem forçosamente lugar em cada ponto do domínio.

Suponhamos, pelo contrário, que tem lugar a igualdade (2'):

$$\int_L X\,dx + Y\,dy = 0,$$

mas que a condição (3) não tem lugar, isto é, que

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \neq 0$$

se verificaria apenas um único ponto. Seja, por exemplo, num ponto $P(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} > 0.$$

Como se tem no primeiro membro uma função contínua, ela é superior a um certo número $\delta > 0$ em todos os pontos dum domínio suficientemente pequeno D' que contenha o ponto $P(x_0, y_0)$. Tomemos o integral duplo da diferença $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ s sobre este domínio. Ele é positivo. Com efeito,

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy > \iint_{D'} \delta\,dx\,dy = \delta \iint_{D'} dx\,dy = \delta D' > 0.$$

Ora, segundo a fórmula de Green, o primeiro membro desta última desigualdade é igual ao integral curvilíneo sobre a fronteira L' do domínio D', que por hipótese é nula. Logo, esta desigualdade contradiz a condição (2') e a suposição de que $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ é diferente de zero, não o seria senão num ponto, é falsa. Tem-se, pois,

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$$

em todos os pontos do domínio D.

O teorema está completamente demonstrado.

Mostramos, no § 9, cap. XIII, que a condição

$$\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x, y)}{\partial y}$$

traduzia o facto de que a expressão $X\,dx + Y\,dy$ *é o diferencial total duma certa função* $u(x, y)$, isto é, que

$$X\,dx + Y\,dy = du(x, y)$$

com

$$X(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Y(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Mas, então, o vector

$$F = Xi + Yj = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j$$

é o gradiente da função $u(x, y)$; a função $u(x, y)$ cujo gradiente é o vector $Xi + Yj$, chama-se *potencial* deste vector.

Mostremos que, *neste caso, o integral curvilíneo* $I = \int_{(M)}^{(N)} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$, *sobre uma curva arbitrária que reúne os pontos M e N é igual à diferença dos valores da função u nestes pontos:*

$$\int_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy = \int_{(M)}^{(N)} du(x, y) = u(N) - u(M).$$

Demonstração — Se $X\,dx + Y\,dy$ é o diferencial total da função $u(x, y)$, tem-se $X = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial u}{\partial y}$ e o integral curvilíneo escreve-se

$$I = \int_{(M)}^{(N)} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

Para calcular este integral, escrevamos as equações paramétricas da curva L que reúne M e N:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Admitiremos que corresponde ao valor $t = t_0$ do parâmetro o ponto M e ao valor $t = T$ o ponto N. O integral curvilíneo reduz-se, então, ao integral definido

$$I = \int_{t_0}^{T} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right] dt.$$

A expressão entre parêntesis é uma função de t que exprime a derivada total da função $u[\varphi(t), \psi(t)]$ em relação a t.

Por conseguinte,

$$I = \int_{t_0}^{T} \frac{du}{dt}\, dt = u\,[\varphi(t),\ \psi(t)]\,|_{t_0}^{T} =$$

$$= u\,[\varphi(t),\ \psi(t)] - u\,[\varphi(t_0),\ \psi(t_0)] = u\,(N) - u\,(M).$$

Vê.se que o integral curvilíneo dum diferencial total não depende do caminho de integração.

O integral curvilíneo estendido a uma curva empenada goza da mesma propriedade (ver § 7).

Nota — Tem-se, por vezes, de integrar o integral curvilíneo duma função $X(x, y)$ em relação ao arco da curva de integração L:

$$\int_L X(x,\ y)\, ds = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(x_i,\ y_i)\, \Delta s_i, \tag{4}$$

sendo ds o diferencial do arco. Calcula-se estes integrais como os integrais curvilíneos considerados acima. Suponhamos a curva L dada pelas equações paramétricas

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

sendo $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ funções contínuas de t.

Sejam α e β os valores do parâmetro t correspondentes às extremidades do arco L.

Como

$$ds = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt,$$

obtém-se a seguinte fórmula para calcular o integral (4):

$$\int_L X(x,\ y)\, ds = \int_{\alpha}^{\beta} X\,[\varphi(t),\ \psi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt.$$

Pode-se considerar o integral curvilíneo em relação ao arco da curva empenada $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$:

$$\int_L X(x,\ y,\ z)\, ds = \int_{\alpha}^{\beta} X\,[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)] \times$$

$$\times \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\, dt.$$

Com a ajuda dos integrais curvilíneos com elemento diferencial, o arco ds, pode-se determinar, por exemplo, os centros de gravidade de curvas pesadas.

Raciocinando como no § 8, cap. XII, (tomo I,) obtém-se as seguintes fórmulas para o cálculo das coordenadas do centro de gravidade duma curva empenada:

$$x_c = \frac{\int_L x\,ds}{\int_L ds}, \quad y_c = \frac{\int_L y\,ds}{\int_L ds}, \quad z_c = \frac{\int_L z\,ds}{\int_L ds}. \tag{5}$$

Exemplo — Encontrar as coordenadas do centro de gravidade duma espira da hélice,

$$x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad z = bt \quad (0 \leqslant t < 2\pi),$$

sabendo que a sua densidade linear é constante.

Resolução — Aplicando-se a fórmula (5), obtém-se:

$$x_c = \frac{\int_0^{2\pi} a\cos t\,\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt}{\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2}\,dt} =$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi} a\cos t\,\sqrt{a^2+b^2}\,dt}{\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\,dt} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}\cdot 0}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}} = 0.$$

Duma maneira análoga $y_c = 0$,

$$z_c = \frac{\int_0^{2\pi} bt\,\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b\cdot 2\pi^2\sqrt{a^2+b^2}}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}} = \pi b.$$

Tem-se, então, para coordenadas do centro de gravidade duma espira da hélice

$$x_c = 0, \quad y_c = 0, \quad z_c = \pi b.$$

§ 5. Integrais de superfície

Seja dado em coordenadas rectangulares $Oxyz$ um domínio V. Em V é dada uma superfície σ limitada por uma curva empenada λ.

Relativamente à superfície σ, suporemos que se definiu em cada ponto P um sentido positivo indicando a normal unitária $n(P)$ cujos cossenos directores serão funções contínuas das coordenadas dos pontos da superfície.

Consideremos em cada ponto da superfície um vector

$$\boldsymbol{F} = X(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{i} + Y(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{j} + Z(x,\ y,\ z)\,\boldsymbol{k},$$

sendo X, Y, Z funções contínuas das coordenadas.

Dividamos arbitràriamente a superfície em áreas elementares $\Delta\sigma_i$. Tomemos um ponto arbitrário P_i em cada elemento e consideremos a soma

$$\sum (\boldsymbol{F}(P_i)\,\boldsymbol{n}(P_i))\,\Delta\sigma_i, \tag{1}$$

sendo $\boldsymbol{F}(P_i)$ o valor do vector $\boldsymbol{F}$ no ponto P_i de $\Delta\sigma_i$, $\boldsymbol{n}(P_i)$ o vector unitário da normal nesse ponto, $\boldsymbol{Fn}$ o produto escalar destes vectores

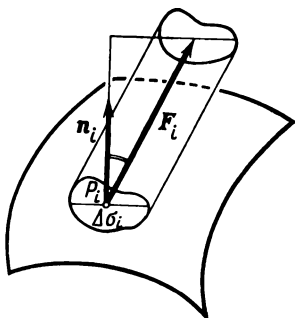



Fig. 336

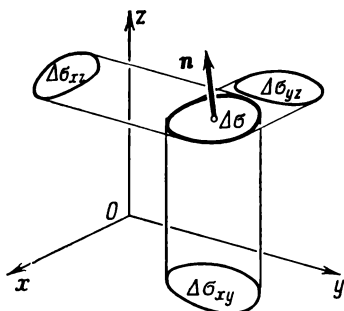



Fig. 337

O limite da soma (1) relativo a todas as áreas $\Delta\sigma_i$ quando o maior diâmetro destas áreas tende para zero é, por definição, um integral de superfície que se designa pelo símbolo

$$\iint_\sigma \boldsymbol{Fn}\,d\sigma.$$

Então, por definição (*), tem-se

$$\lim_{\text{diam}\,\Delta\sigma_i\to 0} \sum \boldsymbol{F}_i\boldsymbol{n}_i\Delta\sigma_i = \iint_\sigma \boldsymbol{Fn}\,d\sigma. \tag{2}$$

Cada termo da soma (1)

$$\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{n}_i\Delta\sigma_i = F_i\,\Delta\sigma_i\cos(\boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{F}_i) \tag{3}$$

admite a seguinte interpretação: este produto é igual ao volume dum cilindro elementar de base $\Delta\sigma_i$ e de altura $F_i\cos(\boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{F}_i)$. Se $\boldsymbol{F}$ for a velocidade dum fluído que atravessa a superfície σ, o produto (3) é igual à quantidade de fluído que atravessa o elemento $\Delta\sigma_i$ na unidade de tempo na direcção $\boldsymbol{n}_i$ (fig. 336).

(*) Se a superfície σ admite em cada ponto um plano tangente que varia continuamente com P e se a função vectorial $\boldsymbol{F}$ é contínua nesta superfície, este limite existe (admitiremos sem demonstração, este teorema de existência dos integrais de superfície).

A expressão $\iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{F n}\, d\sigma$ dá a quantidade total do fluído que atravessa na unidade de tempo a superfície σ no sentido positivo, sendo $\boldsymbol{F}$ o vector velocidade do fluído no ponto dado. Eis porque o integral de superfície (2) se chama ainda *fluxo de campo vectorial* $\boldsymbol{F}$ através da superfície σ.

Resulta da definição de integral de superfície que se se dividir a superfície σ em partes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$. ter-se-á

$$\iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{F n}\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} \boldsymbol{F n}\, d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2} \boldsymbol{F n}\, d\sigma + \ldots + \iint\limits_{\sigma_k} \boldsymbol{F n}\, d\sigma.$$

O vector unitário $\boldsymbol{n}$ escreve-se:

$$\boldsymbol{n} = \cos(n, x)\,\boldsymbol{i} + \cos(n, y)\,\boldsymbol{j} + \cos(n, z)\,\boldsymbol{k}.$$

Substituindo no integral (2) as expressões dos vectores $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{n}$ em função das suas componentes, obtém-se:

$$\iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{F n}\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} [X\cos(n, x) + Y\cos(n, y) + Z\cos(n, z)]\, d\sigma. \qquad (2')$$

O produto $\Delta\sigma \cos(n, z)$ é a projecção da área $\Delta\sigma$ sobre o plano Oxy (fig. 337); tem-se igualmente para os outros produtos:

$$\Delta\sigma\cos(n, x) = \Delta\sigma_{yz},\quad \Delta\sigma\cos(n, y) = \Delta\sigma_{xz},\quad \Delta\sigma\cos(n, z) = \Delta\sigma_{xy}, \qquad (4)$$

onde $\Delta\sigma_{yz}$, $\Delta\sigma_{xz}$, $\Delta\sigma_{xy}$ são as projecções da área $\Delta\sigma$ sobre os correspondentes planos coordenados.

Sendo assim, o integral (2′) escreve-se ainda sob a forma

$$\iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{F n}\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} [X\cos(n, x) + Y\cos(n, y) + Z\cos(n, z)]\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} X\, dy\, dz + Y\, dz\, dx + Z\, dx\, dy. \qquad (2'')$$

§ 6. Cálculo dos integrais de superfície

O cálculo de um integral sobre uma superfície empenada reduz-se ao cálculo dum integral duplo sobre um domínio plano.

Indiquemos um processo de cálculo do integral

$$\iint\limits_{\sigma} Z\cos(n, z)\, d\sigma.$$

Suponhamos a superfície σ tal que qualquer recta paralela ao eixo Oz o corta num só ponto. A equação de superfície pode ser posta, então, sob a forma

$$z = f(x, y).$$

Designando por D a projecção da superfície σ sobre o plano Oxy, tem-se (em virtude da definição dos integrais de superfície):

$$\iint_\sigma Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma =$$

$$= \lim_{\text{diam}\, \Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Z(x_i, y_i, z_i) \cos(n_i, z) \Delta\sigma_i.$$

Em seguida, tendo em consideração a última fórmula (4) do § 5, obtém-se:

$$\iint_\sigma Z \cos(n, z)\, d\sigma =$$

$$= \lim_{\text{diam}\, \Delta\sigma_{xy} \to 0} \sum_{i=1}^{n} Z(x_i, y_i, f(x_i, y_i)) (\Delta\sigma_{xy})_i =$$

$$= \pm \lim_{\text{diam}\, \Delta\sigma \to 0} \sum_{i=1}^{n} Z(x_i, y_i, f(x_i, y_i)) \,|\, \Delta\sigma_{xy} \,|_i,$$

sendo a última expressão uma soma integral para o integral duplo da função $Z(x, y, f(u, y))$ no domínio D. Por conseguinte,

$$\iint_\sigma Z \cos(n, z)\, d\sigma = \pm \iint_D Z(x, y, f(x, y))\, dx\, dy.$$

O sinal mais corresponde a $\cos(n, z) \geqslant 0$ e o sinal menos a $\cos(n, z) \leqslant 0$.

Se a superfície σ não satisfaz à condição indicada no começo deste parágrafo, corta-se-la em partes que satisfaçam a esta condição e calcula-se o integral, separadamente, em cada parte.

Calcula-se, duma maneira análoga, os integrais

$$\iint_\sigma X \cos(n, x)\, d\sigma; \qquad \iint_\sigma Y \cos(n, y)\, d\sigma.$$

Assim se encontra justificada a expressão dum integral de superfície sob a forma (2″) do §5.

Poder-se-á considerar, então, que o segundo membro da igualdade (2″) é uma soma de integrais duplos sobre as projecções correspondentes do domínio σ, sendo os sinais destes integrais duplos (ou, como se diz ainda, os sinais dos produtos $dy\,dz$, $dx\,dz$, $dx\,dy$) tomados de acordo com a regra indicada.

Exemplo — 1. Consideremos uma superfície fechada σ cortada em dois pontos no máximo por qualquer paralela ao eixo Oz.

Consideremos o integral

$$\iint_\sigma z \cos(n, z)\, d\sigma.$$

Escolheremos como normal positiva a normal exterior. Podemos cortar esta superfície em duas partes, inferior e superior de equações:

$$z = f_1(x, y) \quad \text{et} \quad z = f_2(x, y).$$

Designemos por D a projecção σ sobre o plano Oxy (fig. 338); tem-se:

$$\iint_\sigma z \cos(n, z)\, d\sigma = \iint_D f_2(x, y)\, dx\, dy - \iint_D f_1(x, y)\, dx\, dy.$$

O segundo integral foi afectado do sinal menos, porque no integral de superfície o produto $dxdy$ para a superfície $z = f_1(x, y)$ deve ser precedido do sinal menos, dado que $\cos(n, z)$ é negativo.

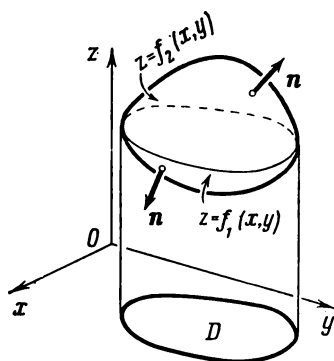



Fig. 338

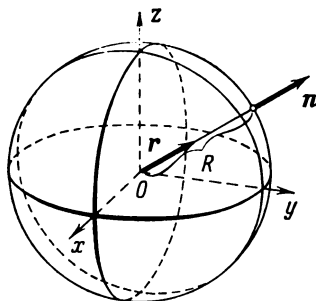



Fig. 339

Ora, a diferença dos integrais do segundo membro representa o volume limitado pela superfície σ. Logo, o volume do corpo limitado pela superfície σ é igual ao integral de superfície

$$V = \iint_\sigma z \cos(n, z)\, d\sigma.$$

Exemplo — 2. Uma carga eléctrica positiva e colocada na origem das coordenadas origina um campo vectorial cuja distribuição do vector $\boldsymbol{F}$ é dada em cada ponto pela lei de Coulomb:

$$\boldsymbol{F} = k\frac{e}{r^2}\boldsymbol{r},$$

sendo r a distância do ponto considerado à origem e $\boldsymbol{r}$ o vector unitário do raio vector dirigido em direcção ao ponto considerado (fig. 339); k é um factor constante.

Calcular o fluxo do campo de vectores através de uma esfera de raio R centrada na origem.

Resolução — Considerando que $r = R = \text{const.}$, tem-se:

$$\iint_\sigma k\frac{e}{r^2}\,rn\,d\sigma = \frac{ke}{R^2}\iint_\sigma rn\,d\sigma.$$

Mas o último integral é igual à área σ da esfera. Com efeito, o produto escalar rn é constantemente igual à unidade e fica

$$\iint_\sigma d\sigma = \sigma.$$

Por conseguinte, o fluxo procurado é

$$\frac{ke}{R^2}\sigma = \frac{ke}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi ke.$$

§ 7. Fórmula de Stokes

Seja dada uma superfície σ tal que qualquer paralela a Oz a corta num único ponto. Designemos por λ a sua fronteira. A normal positiva à superfície n será a que forma com Oz um ângulo agudo (fig. 340).

Seja $z = f(x, y)$ a equação da superfície. Os cossenos directores da normal à superfície têm por expressão (ver § 6, cap. IX, tomo I):

$$\left.\begin{aligned}
\cos(n, x) &= \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}};\\
\cos(n, y) &= \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}};\\
\cos(n, z) &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Suporemos que a superfície σ se encontra completamente num domínio espacial V. Seja dada em V uma função contínua $X(x, y, z)$ com as suas derivadas parciais de primeira ordem. Consideremos o integral curvilíneo tomado ao longo do contorno λ

$$\int_\lambda X(x, y, z)\,dx.$$

Tem-se, ao longo de λ $z = f(x, y)$, sendo x, y as coordenadas dos pontos da curva L, projecção de λ sobre o plano Oxy (fig. 340). Por conseguinte, pode-se escrever

$$\int_{\lambda} X(x, y, z)\,dx = \int_{L} X(x, y, f(x, y))\,dx. \quad (2)$$

Fig. 340

Este último integral é um integral curvilíneo tomado ao longo de L. Transformemo-lo, aplicando a fórmula de Green, fazendo

$$X(x, y, f(x, y)) = \overline{X}(x, y), \qquad 0 = \overline{Y}(x, y).$$

Substituindo na fórmula de Green $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ pelas suas expressões, obtém-se:

$$-\iint_{D} \frac{\partial X(x, y, f(x, y))}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{L} X(x, y, f(x, y))\,dx, \quad (3)$$

sendo o domínio D limitado por L. Derivemos a função composta $X(x, y, f(x, y))$ em relação a y:

$$\frac{\partial X(x, y, f(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z}\,\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}. \quad (4)$$

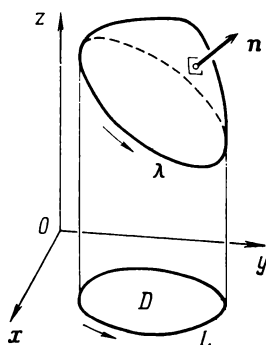
Substituindo a expressão (4) no primeiro membro de (3), obtém-se:

$$-\iint_{D}\left[\frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z}\,\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right]dx\,dy = \int_{L} X(x, y, f(x, y))\,dx.$$

Tendo em conta (2) esta última igualdade escreve-se:

$$\int_{\lambda} X(x, y, z)\,dx = -\iint_{D} \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy - \iint_{D} \frac{\partial X}{\partial z}\,\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy. \quad (5)$$

Os dois últimos integrais transformam-se em integrais de superfície. Com efeito, resulta da fórmula (2″) do § 5 que se tem para qualquer função $A(x, y, z)$ a igualdade

$$\iint_{\sigma} A(x, y, z)\cos(n, z)\,d\sigma = \iint_{D} A\,dx\,dy.$$

Sendo assim, os integrais do segundo membro de (5) transformam-se como se segue:

$$\left.\begin{aligned}\iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial y}\,dx\,dy &= \iint\limits_\sigma \frac{\partial X}{\partial y}\cos(n,\ z)\,d\sigma,\\ \iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy &= \iint\limits_\sigma \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\cos(n,\ z)\,d\sigma.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Transformemos o último integral aplicando as fórmulas (1) do presente parágrafo; calculando o quociente da igualdade (1) pela terceira, encontra-se:

$$\frac{\cos(n,\ y)}{\cos(n,\ z)} = -\frac{\partial f}{\partial y},$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial y}\cos(n,\ z) = -\cos(n,\ y).$$

Por conseguinte,

$$\iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy = -\iint\limits_\sigma \frac{\partial X}{\partial z}\cos(n,\ y)\,d\sigma. \tag{7}$$

Substituindo as expressões (6) e (7) em (5), obtém-se:

$$\int\limits_\lambda X(x,\ y,\ z)\,dx = -\iint\limits_\sigma \frac{\partial X}{\partial y}\cos(n,\ z)\,d\sigma + \\ + \iint\limits_\sigma \frac{\partial X}{\partial z}\cos(n,\ y)\,d\sigma. \tag{8}$$

O sentido de percurso de λ deve ser tal que um observador atravessado de pés à cabeça pela normal n veria o contorno percorrido no sentido inverso dos ponteiros de um relógio.

A fórmula (8) é verdadeira para qualquer superfície podendo ser cortada em duas partes de equações da forma $z = f(x,\ y)$.

Obtém-se, duma maneira análoga, as fórmulas

$$\int\limits_\lambda Y(x,\ y,\ z)\,dy = \iint\limits_\sigma \left[-\frac{\partial Y}{\partial z}\cos(n,\ x) + \frac{\partial Y}{\partial x}\cos(n,\ z)\right]d\sigma, \tag{8'}$$

$$\int\limits_\lambda Z(x,\ y,\ z)\,dz = \iint\limits_\sigma \left[-\frac{\partial Z}{\partial x}\cos(n,\ y) + \frac{\partial Z}{\partial y}\cos(n,\ x)\right]d\sigma. \tag{8''}$$

Somemos membro a membro as igualdades (8), (8′) e (8″); obtém-se a fórmula

$$\int X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos(n,\ z) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos(n,\ x) + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos(n,\ y) \right] d\sigma. \tag{9}$$

É a *fórmula de Stokes* (matemático inglês (1819-1903)). Ela permite transformar um integral de superfície σ num integral curvilíneo tomado sobre a fronteira λ desta superfície, sendo o sentido de percurso da fronteira o especificado mais acima.

O vector $\mathbf{B}$ de componentes

$$B_x = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}; \quad B_y = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}; \quad B_z = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

chama-se *vector «tourbillon»* ou *rotacional* da função vectorial $\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$ e escreve-se, simbòlicamente, *rot* $\boldsymbol{F}$.

Por conseguinte, pode-se recopiar a fórmula (9) sob a forma *vectorial*

$$\int_{\lambda} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{s} = \iint_{\sigma} \boldsymbol{n}\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{F}\, d\sigma, \tag{9′}$$

e o teorema de Stokes, enuncia-se:

A circulação de um vector ao longo dum contorno fechado que limita uma superfície é igual ao fluxo do seu rotacional através desta superfície.

Nota — Se a superfície σ é uma porção de plano paralelo a Oxy, tem-se $\Delta z = 0$ e encontra-se a fórmula de Green como caso particular da fórmula de Stokes.

Resulta da fórmula (9) que se

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \tag{10}$$

o integral curvilíneo é nulo sobre qualquer curva empenada fechada λ:

$$\int_{\lambda} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0. \tag{11}$$

O integral curvilíneo não depende, pois, da forma da curva de integração.

Como no caso duma curva plana, mostra-se que as condições mencionadas (10) são não sòmente suficientes mas também necessárias para ter a igualdade (11).

Sendo estas condições satisfeitas, a expressão sob o sinal soma é o diferencial total duma certa função $u(x, y, z)$:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = du(x, y, z)$$

e, por conseguinte,

$$\int_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int_{(M)}^{(N)} du = u(N) - u(M).$$

Demonstra-se-lo tal como para a fórmula correspondente no caso de uma função de duas variáveis (ver § 4).

Exemplo — 1. Escrevamos as fórmulas fundamentais da dinâmica do ponto material

$$m\frac{dv_x}{dt} = X; \quad m\frac{dv_y}{dt} = Y; \quad m\frac{dv_z}{dt} = Z.$$

Aqui m é a massa do ponto; X, Y, Z são as componentes da força que solicita o ponto; $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$ as componentes da velocidade v.

Multipliquemos os dois membros das equações acima pelas expressões

$$v_x\,dt = dx, \quad v_y\,dt = dy, \quad v_z\,dt = dz.$$

Obtém-se, juntando membro a membro as igualdades dadas:

$$m(v_x\,dv_x + v_y\,dv_y + v_z\,dv_z) =$$
$$= X\,dx + Y\,dy + Z\,dz;$$
$$m\frac{1}{2}d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Como $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$, pode-se escrever:

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Fig. 341

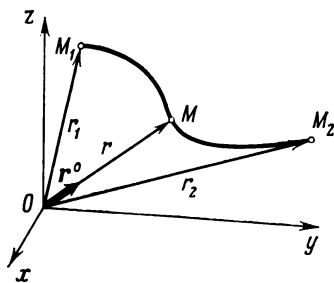
Calculemos os integrais dos dois membros entre dois pontos M_1 e M_2 sobre a trajectória:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{(M_1)}^{(M_2)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

sendo v_1 e v_2 as velocidades no ponto M_1 e M_2.

Esta última igualdade traduz o teorema das forças vivas; a variação da energia cinética entre dois pontos é igual ao trabalho da força que age sobre a massa m.

Exemplo — 2. Calcular o trabalho da força de atracção newtoniana duma massa imóvel m que age sobre uma massa unitária deslocando-se entre dois pontos $M_1(a_1, b_1, c_1)$ e $M_2(a_2, b_2, c_2)$.

Resolução — Tomemos a origem das coordenadas no centro atractivo. Designemos por r o raio vector (fig. 341) traçado da origem ao ponto onde

se encontra a massa unitária e seja r^0 o vector unitário desta direcção. Tem-se, então, $F = -\frac{km}{r^2} r^0$, sendo k a constante universal de gravitação. As componentes de F sobre os eixos são, respectivamente,

$$X = -km \frac{1}{r^2} \frac{x}{r}; \quad Y = -km \frac{1}{r^2} \frac{y}{r}; \quad Z = -km \frac{1}{r^2} \frac{z}{r}.$$

O trabalho da força F sobre o arco M_1M_2 é

$$A = -km \int_{(M_1)}^{(M_2)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r^3} = -km \int_{(M_1)}^{(M_2)} \frac{r\,dr}{r^3} = km \int_{(M_1)}^{(M_2)} d\left(\frac{1}{r}\right)$$

(dado que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $r\,dr = x\,dx + y\,dy + z\,dz$). Designando por r_1 e r_2 os comprimentos dos raios vectores dos pontos M_1 e M_2, obtém-se:

$$A = km \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Por conseguinte, aqui ainda o integral curvilíneo não depende do caminho de integração. A função $u = \frac{km}{r}$ chama-se *potencial* do campo de atracção da massa m. No nosso caso

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$A = u(M_2) - u(M_1),$$

isto é, que o trabalho para deslocar a massa unitária é igual à diferença do potencial entre os pontos final e inicial.

§ 8. Fórmula de Ostrogradsky

Seja um domínio regular V do espaço a três dimensões, limitado por uma superfície fechada σ e tendo por projecção sobre o plano Oxy um domínio regular D. Suporemos que se pode dividir a superfície σ em três partes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ de modo que as equações das duas primeiras se escrevam

$$z = f_1(x, y) \quad \text{et} \quad z = f_2(x, y),$$

sendo $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$ contínuas no domínio D e sendo a terceira parte σ_3 uma superfície cilíndrica de geratrizes paralelas ao eixo Oz.

Consideremos o integral

$$I = \iiint_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

Integremos, em primeiro lugar, sobre os z:

$$I = \iint_D \left(\int_{f_1(x,\, y)}^{f_2(x,\, y)} \frac{\partial Z}{\partial z} dz \right) dx\, dy =$$

$$= \iint_D Z(x,\ y,\ f_2(x,\ y))\, dx\, dy - \iint_D Z(x,\ y,\ f_1'(x,\ y))\, dx\, dy. \qquad (1)$$

Definamos sobre a superfície σ a normal positiva, dirigida para o exterior. Então, $\cos(n,\ z)$ será positivo sobre a superfície σ_2 e negativo sobre a superfície σ_1; é nula sobre a superfície σ_3.

Os integrais duplos do segundo membro da igualdade (1) são iguais aos integrais de superfície correspondentes

$$\iint_D Z(x,\ y,\ f_2(x,\ y))\, dx\, dy = \iint_{\sigma_2} Z(x,\ y,\ z) \cos(n,\ z)\, d\sigma, \qquad (2')$$

$$\iint_D Z(x,\ y,\ f_1(x,\ y))\, dx\, dy = \iint_{\sigma_1} Z(x,\ y,\ z)(-\cos(n,\ z))\, d\sigma.$$

Escrevemos no último integral $(-\cos(n,\ z))$ porque o elemento de área $\Delta\sigma_1$ está ligado ao elemento de área Δs do domínio D pela relação $\Delta s = \Delta\sigma_1 [-\cos(n,\ z)]$ dado que o ângulo $(n,\ z)$ é obtuso. Assim,

$$\iint_D Z(x,\ y,\ f_1(x,\ y))\, dx\, dy =$$

$$= - \iint_{\sigma_1} Z(x,\ y,\ f_1(x,\ y)) \cos(n,\ z)\, d\sigma. \qquad (2'')$$

Substituindo (2') e (2'') em (1), obtém-se:

$$\iiint_V \frac{\partial Z(x,\ y,\ z)}{\partial z} dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint_{\sigma_2} Z(x,\ y,\ z) \cos(n,\ z)\, d\sigma + \iint_{\sigma_1} Z(x,\ y,\ z) \cos(n,\ z)\, d\sigma.$$

Para comodidade de cálculos a seguir, recopiemos esta última igualdade juntando-lhe a quantidade $\iint_{\sigma_3} Z(x,\ y,\ z) \cos(n,\ z)\, d\sigma = 0$ (tem-se $\cos(n,\ z) = 0$, sobre σ_3):

$$\iiint_V \frac{\partial Z(x,\ y,\ z)}{\partial z} dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint_{\sigma_2} Z \cos(n,\ z)\, d\sigma + \iint_{\sigma_1} Z \cos(n,\ z)\, d\sigma + \iint_{\sigma_3} Z \cos(n,\ z)\, d\sigma.$$

Ora, a soma dos integrais do segundo membro é igual ao integral sobre toda a superfície σ; por conseguinte,

$$\iiint_V \frac{\partial Z}{\partial z} dx\, dy\, dz = \iint_\sigma Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma.$$

Duma maneira análoga, obtêm-se as relações:

$$\iiint_V \frac{\partial Y}{\partial y} dx\, dy\, dz = \iint_\sigma Y(x, y, z) \cos(n, y)\, d\sigma,$$

$$\iiint_V \frac{\partial X}{\partial x} dx\, dy\, dz = \iint_\sigma X(x, y, z) \cos(n, x)\, d\sigma.$$

Juntando membro a membro éstas três últimas igualdades, obtém-se a fórmula de Ostrogradsky (*):

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint_\sigma (X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z))\, d\sigma. \qquad (2)$$

A expressão $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ chama-se *divergência* do vector

$$F = Xi + Yj + Zk$$

e escreve-se div F:

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Indiquemos que esta fórmula é verdadeira para todo o domínio podendo ser dividida em domínios parciais que satisfaçam às condições mencionadas no começo deste parágrafo.

Vamos dar uma interpretação hidrodinâmica da fórmula estabelecida.

Suponhamos que $F = Xi + Yj + Zk$ é o valor velocidade dum fluído que atravessa o domínio V. O integral de superfície em (2) é, então, o integral da projecção de F sobre a normal exterior n; onde a quantidade de fluído saído do volume V durante a unidade

* Esta fórmula (por vezes, chamada fórmula de Ostrogradsky-Gauss) foi descoberta pelo célebre matemático russo M. Ostrogradsky (1801-1861) que a publicou em 1928 no seu artigo «Notas sobre a teoria do calor».

de tempo (ou que aí entrou, se o integral é negativo). Esta quantidade exprime-se por meio do integral triplo de div $\boldsymbol{F}$.

Se div $\boldsymbol{F} \equiv 0$, o integral duplo sobre qualquer superfície fechada é nulo, a quantidade de fluído entrado ou saído é nula. Mais precisamente, a quantidade de fluído entrado no volume dado é igual à quantidade de fluído saído.

Sob forma vectorial, a fórmula de Ostrogradsky escreve-se:

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{F} \, dv = \iint\limits_\sigma \boldsymbol{F}\boldsymbol{n} \, ds \qquad (1')$$

e enuncia-se: *o integral da divergência dum campo vectorial* $\boldsymbol{F}$ *num volume é igual ao fluxo do campo vectorial através da superfície que limita este volume.*

§ 9. Operador hamiltoniano e algumas aplicações

Seja dada uma função $u = u(x, y, z)$. Em cada ponto do domínio em que a função $u(x, y, z)$ é definida e derivável, é determinado o gradiente:

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (1)$$

Por vezes, o gradiente da função $u(x, y, z)$ é assim designado:

$$\nabla u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}; \qquad (2)$$

o sinal ∇ lê-se «nabla».

1. É cómodo escrever sobre uma forma simbólica a igualdade (2):

$$\nabla u = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) u \qquad (2')$$

e de considerar o símbolo

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (3)$$

como um «vector simbólico». Este vector simbólico chama-se *operador hamiltoniano* ou operador nabla (operador ∇). Decorre das fórmulas (2) e (2′) que quando se «multiplica» o operador simbólico ∇ por uma função escalar u, obtêm-se o gradiente dessa função:

$$\nabla u = \operatorname{grad} u. \qquad (4)$$

2. Pode-se formar o produto escalar do vector simbólico ∇ pelo vector $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$:

$$\nabla\boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}X + \frac{\partial}{\partial y}Y + \frac{\partial}{\partial z}Z = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \operatorname{div}\boldsymbol{F}$$

(ver § 8). Assim,

$$\nabla\boldsymbol{F} = \operatorname{div}\boldsymbol{F}. \tag{5}$$

3. Formemos o produto vectorial do vector simbólico ∇ pelo vector $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z) =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Y & Z \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Z \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ X & Y \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) - \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) =$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = \operatorname{rot}\boldsymbol{F}$$

(ver § 7). Assim,

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \operatorname{rot}\boldsymbol{F}. \tag{6}$$

Decorre do que acaba de ser dito que a utilização do vector simbólico ∇ permite exprimir sob uma forma muito sucinta as operações vectoriais. Consideremos ainda algumas fórmulas.

4. O campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$ diz-se *campo vectorial potencial* se o vector $\boldsymbol{F}$ for o gradiente duma certa função escalar $u(x, y, z)$:

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} u$$

ou

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Neste caso as projecções do vector $\boldsymbol{F}$ serão

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Decorre destas igualdades (ver t. I, cap. VIII, § 12):

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

ou

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0.$$

Por conseguinte, para o vector $\boldsymbol{F}$ considerado

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0.$$

Obtemos, assim:

$$\operatorname{rot} (\operatorname{grad} u) = 0 \tag{7}$$

Aplicando o operador ∇, pode-se escrever em virtude das fórmulas (4) e (6) a igualdade (7) sob a forma:

$$(\nabla \times \nabla u) = 0. \tag{7'}$$

Utilizando a propriedade que da multiplicação dum produto vectorial por um escalar basta multiplicar por este escalar um dos factores sòmente, escreveremos:

$$(\nabla \times \nabla) u = 0. \tag{7''}$$

O operador ∇ possui de novo as propriedades dum vector usual: o produto vectorial do vector por si mesmo é nulo.

O campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ para o qual $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$ diz-se *irrotacional*. Decorre da igualdade (7) que todo o campo potencial é é irrotacional.

O inverso é igualmente verdadeiro; por outras palavras, se um certo campo vectorial $\boldsymbol{F}$ é irrotacional, é potencial. A validade desta afirmação decorre dos raciocínios conduzidos no fim do § 7.

5. O campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ para o qual

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0,$$

isto é, o campo vectorial que não contém origens (ver § 8) chama-se *selenoidal* ou *tubular*. Demonstraremos que

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) = 0, \tag{8}$$

por outras palavras que o campo rotacional não contém origens.

Com efeito, se $F = iX + jY + kZ$, então,

$$\text{rot}\, F = i\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right),$$

e, eis porque,

$$\text{div}\,(\text{rot}\, F) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0.$$

A igualdade (8) escrever-se-á com a ajuda do operador ∇:

$$\nabla\,(\nabla \times F) = 0. \tag{8'}$$

O primeiro membro desta igualdade pode ser considerado como o produto misto vectorial escalar dos três vectores ∇, ∇, F de que dois são idênticos. Este produto é, evidentemente, igual a zero.

6. Seja dado um campo escalar $u = u(x, y, z)$. Definamos o campo dos gradientes:

$$\text{grad}\, u = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Achamos, em seguida,

$$\text{div}\,(\text{grad}\, u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

ou

$$\text{div}\,(\text{grad}\, u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{9}$$

O segundo membro desta igualdade chama-se *operador de Laplace* da função u e nota-se por

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{10}$$

Por conseguinte, a igualdade (9) pode-se escrever:

$$\text{div}\,(\text{grad}\, u) = \Delta u. \tag{11}$$

Com o auxílio do operador ∇ a igualdade (11) escrever-se-á sob a forma

$$(\nabla\nabla u) = \Delta u. \tag{11'}$$

Notemos que a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{12}$$

ou

$$\Delta u=0 \tag{12'}$$

se chama *equação de Laplace*. As funções que verificam a função de Laplace chamam-se *funções harmónicas*.

Exercícios

Calcular os integrais curvilíneos seguintes:

1. $\int y^2\,dx+2xy\,dy$ sobre o círculo $x=a\cos t$, $y=a$ sen t. Resp. 0.
2. $\int y\,dx-x\,dy$ sobre a elipse $x=a\cos t$, $y=b$ sen t. Resp. $-2\pi ab$.
3. $\int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx-\frac{y}{x^2+y^2}\,dy$ sobre um círculo centrado na origem. Resp. 0.
4. $\int \frac{y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$ sobre a recta $y=x$ de $x=1$ à $x=2$. Resp. Log 2.
5. $\int yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$ sobre a hélice $x=a\cos t$, $y=a$ sen t, $z=kt$, t variando entre 0 et 2π. Resp. 0.
6. $\int x\,dy-y\,dx$ sobre a hipociclóide $x=a\cos^3 t$, $y=a$ sen$^3 t$. Resp. $\frac{3}{4}\pi a^2$ (o dobro da área limitada pela curva).
7. $\int x\,dy-y\,dx$ estendido à curva do fólio de Descartes $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$. Resp. $\frac{3}{2}a^2$ (o dobro da área limitada pela curva).
8. $\int x\,dy-y\,dx$ sobre a curva $x=a(t-\text{sen}\,t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$. Resp. $-6\pi a^2$ (o dobro da área compreendida entre um arco da ciclóide e o eixo Ox).

Demonstrar que:

9. grad $(c\varphi)=c$ grad φ, onde c é constante.
10. grad $(c_1\varphi+c_2\psi)=c_1$ grad $\varphi+c_2$ grad ψ, onde c é constante.
11. grad $(\varphi\psi)=\varphi$ grad $\psi+\psi$ grad φ.
12. Calcular grad r, grad r^2, grad $\frac{1}{r}$, grad $f(r)$, onde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Resp. $\frac{r}{r}$; $2r$; $-\frac{r}{r^3}$; $f'(r)\frac{r}{r}$.
13. Demonstrar que div $(A+B)=$ div $A+$ div B.
14. Calcular div r, où $r=xi+yj+zk$. Resp. 3.
15. Calcular div $(A\varphi)$, onde A é uma função vectorial e φ uma função escalar Resp. φ div $A+$ (grad φA).

16. Calcular $\operatorname{div}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c})$, onde $\boldsymbol{c}$ é um vector constante. Resp. $\frac{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})}{r}$.
17. Calcular $\operatorname{div}\boldsymbol{B}(r\boldsymbol{A})$, Resp. $\boldsymbol{AB}$

Demonstrar que:

18. $\operatorname{rot}(c_1\boldsymbol{A}_1+c_2\boldsymbol{A}_2)=c_1\operatorname{rot}\boldsymbol{A}_1+c_2\operatorname{rot}\boldsymbol{A}_2$, onde c_1 et c_2 são constantes.
19. $\operatorname{rot}(Ar)=\operatorname{grad}A\times\boldsymbol{c}$, onde $\boldsymbol{c}$ é um vector constante.
20. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A}-\Delta\boldsymbol{A}$.
21. $\boldsymbol{A}\times\operatorname{grad}\varphi=\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{A})$.

Integrais de superfícies

22. Mostrar que $\iint\cos(n,z)\,d\sigma=0$ sobre uma superfície fechada.
23. Achar o momento de inércia dum segmento esférico de equação x^2+y^2+ $+z^2=R^2$ cortado pelo plano $z=H$ em relação ao eixo Oz. Resp. $\frac{2\pi R}{3}(2R^3-3R^2H+H^3)$.
24. Achar o momento de inércia da porção do parabolóide de revolução $x^2+y^2=2cz$ contido pelo plano $z=c$ em relação ao eixo Oz. Resp. $\frac{16}{3}c^5$.
25. Calcular as coordenadas do centro de gravidade da parte da superfície cónica $x^2+y^2=\frac{R^2}{H^2}z^2$ cortada pelo plano $z=H$. Resp. $0;\ 0;\ \frac{2}{3}H$
26. Calcular as coordenadas do centro de gravidade do segmento da superfície esférica $x^2+y^2+z^2=R^2$ cortado pelo plano $z=H$. Resp. $\left(0,\ 0,\ \frac{R+H}{2}\right)$.
27. Calcular $\iint[x\cos(nx)+y\cos(ny)+z\cos(nz)]\,d\sigma$ sobre uma superfície fechada. Resp. $3V$, sendo V o volume interior à superfície
28. Calcular $\iint_S z\,dx\,dy$, onde S designa o lado exterior da esfera x^2+ $+y^2+z^2=R^2$. Resp. $\frac{4}{3}\pi R^3$.
29. Calcular $\iint_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, onde S é o lado exterior da superfície da esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$. Resp. πR^4.
30. Calcular $\iint_S\sqrt{x^2+y^2}\,ds$, onde S designa a superfície lateral do cone $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0,\ 0\leqslant z\leqslant b$. Resp. $\frac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$
31. Com a ajuda da fórmula de Stokes transformar o integral $\int_L y\,dx+z\,dy+$ $+x\,dz$. Resp. $-\iint_S(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,ds$.

Achar os integrais curvilíneos directamente e aplicando a fórmula de Stokes:

32. $\int\int_L (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$, onde L é o círculo $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$. Resp. 0.

33. $\int_L x^2y^3\,dx+dy+z\,dz$, onde L é o círculo $x^2+y^2=R^2$, $z=0$. Resp. $-\frac{\pi R^6}{8}$.

Aplicando a fórmula de Ostrogradsky, transformar os integrais de superfície em integrais de volume:

34. $\int\int_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,ds$. Resp. $\int\int_V\int 3dx\,dy\,dz$.

35. $\int\int_S (x^2+y^2+z^2)(dy\,dz+dx\,dz+dx\,dy)$. Resp. $2\int\int_V\int (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$.

36. $\int\int_S xy\,dx\,dy+yz\,dy\,dz+zx\,dz\,dx$. Resp. 0.

37.

$$\int\int_S \frac{\partial u}{\partial x}dy\,dz+\frac{\partial u}{\partial y}dx\,dz+\frac{\partial u}{\partial z}dx\,dy. \text{ Resp. } \int\int_V\int\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz.$$

Aplicando a fórmula de Ostrogradsky, calcular os integrais seguintes:

38. $\int\int_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,ds$, onde S é a superfície de elipsóide. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Resp. $4\pi abc$.

39. $\int\int_S (x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\,ds$, onde S é a superfície da esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$. Resp. $\frac{12}{5}\pi R^5$.

40. $\int\int_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, onde S é a superfície do cone $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ $(0\leqslant z\leqslant b)$. Resp. $\frac{\pi a^2b^2}{2}$.

41. $\int\int_S x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy$, onde S é superfície do cilindro $x^2+y^2=a^2$, $-H\leqslant z\leqslant H$. Resp. $3\pi a^2H$.

42. Demonstrar a identidade $\int\int_D\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)dx\,dy=\int_C\frac{\partial u}{\partial n}ds$, onde C é o contorno que limita o domínio D e $\frac{\partial u}{\partial n}$ a derivada segundo a normal exterior.

Resolução:

$$\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_C -Y\, dx + X\, dy =$$

$$= \int_C [-Y \cos(s, x) + X \operatorname{sen}(s, x)]\, ds,$$

onde (s, x) é o ângulo entre a tangente ao contorno C e o eixo Ox. Se se designar por (n, x) o ângulo entre a normal e Ox, tem-se $\operatorname{sen}(s, x) = \cos(n, x)$, $\cos(s, x) = -\operatorname{sen}(n, x)$. Por conseguinte,

$$\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\, dy = \int [X \cos(n, x) + Y \operatorname{sen}(n, x)]\, ds.$$

Fazendo $X = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial u}{\partial y}$, obtém-se:

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\, dy = \int_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \operatorname{sen}(n, x)\right) ds$$

ou

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\, dy = \int_C \frac{\partial u}{\partial n}\, ds.$$

A expressão $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ chama-se *operador de Laplace.*

43. Estabelecer a identidade (chamada *fórmula de Green*)

$$\iiint_V (v\Delta u - u\Delta v)\, dx\, dy\, dz = \iint_\sigma \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma,$$

sendo u e v contínuas e tendo derivadas de segunda ordem contínuas no domínio D. Os símbolos Δu e Δv representam:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

São os *operadores de Laplace* no espaço.

Resolução — Na fórmula

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint_\sigma [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)]\, d\sigma$$

façamos

$$X = vu'_x - uv'_x,$$

$$Y = vu'_y - uv'_y,$$

$$Z = vu'_z - uv'_z.$$

Tem-se

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=v\,(u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz})-u\,(v''_{xx}+v''_{yy}+v''_{zz})=v\Delta u-u\Delta v,$$

$$X\cos(n,\,x)+Y\cos(n,\,y)+Z\cos(n,\,z)=$$

$$=v\,(u'_x\cos(n,\,x)+u'_y\cos(n,\,y)+u'_z\cos(n,\,z))-u\,(v'_x\cos(n,\,x)+$$

$$+v'_y\cos(n,\,y)+v'_z\cos(n,\,z))=v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}.$$

Por conseguinte,

$$\iiint\limits_V (v\Delta u-u\Delta v)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_\sigma \left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\partial\sigma.$$

44. Estabelecer a identidade

$$\iiint\limits_V \Delta u\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_\sigma \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma,$$

onde $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ (operador de Laplace).

Resolução — Façamos, na fórmula de Green, estabelecida no exemplo anterior, $v=1$. Então, $\Delta v=0$ e a identidade está demonstrada.

45. Se $u\,(x,\,y,\,z)$ é uma função harmónica num certo domínio, isto é, uma função tal que em cada ponto deste domínio é verificada a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

tem-se, em toda a superfície fechada σ

$$\iint\limits_\sigma \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=0.$$

Resolução — Isso resulta directamente da fórmula do problema 44.

46. Seja $u\,(x,\,y,\,z)$ uma função harmónica num domínio V e consideremos em V uma esfera $\bar{\sigma}$ de centro $M\,(x_1,\,y_1,\,z_1)$ e de raio R. Mostrar que

$$u\,(x_1,\,y_1,\,z_1)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\bar{\sigma}} u\,d\sigma.$$

Resolução — Consideremos o domínio Ω limitado pelas duas esferas σ, $\bar{\sigma}$ de raios R e $\rho\,(\rho<R)$, de centros no ponto $M\,(x_1,\,y_1,\,z_1)$. Apliquemos a este domínio a fórmula, de Green do problema 43, onde u será a função indicada acima e v a função

$$v=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}.$$

Confirmamos directamente, derivando e substituindo, que $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+$ $+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$. Por conseguinte,

$$\iint\limits_{\underline{\sigma}+\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)d\sigma=0,$$

ou

$$\iint\limits_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)d\sigma-\iint\limits_{\bar{\sigma}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)d\sigma=0.$$

Sobre as superfícies $\bar{\sigma}$ e $\underline{\sigma}$ a quantidade $\frac{1}{r}$ é constante $\left(\frac{1}{R}\text{ e }\frac{1}{\rho}\right)$ e pode-se-la fazer sair do sinal de integração. Em virtude do resultado estabelecido no problema 45:

$$\frac{1}{R}\iint\limits_{\underline{\sigma}}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=0\,;$$

$$\frac{1}{\rho}\iint\limits_{\bar{\sigma}}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=0.$$

Por conseguinte,

$$-\iint\limits_{\underline{\sigma}}u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}d\sigma+\iint\limits_{\bar{\sigma}}u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}d\sigma=0,$$

mas

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}=-\frac{1}{r^2}.$$

Logo

$$+\iint\limits_{\underline{\sigma}}u\frac{1}{r^2}d\sigma-\iint\limits_{\bar{\sigma}}u\frac{1}{r^2}d\sigma=0$$

ou

$$\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{\underline{\sigma}}u\,d\sigma=\frac{1}{R^2}\iint\limits_{\bar{\sigma}}u\,d\sigma. \tag{1}$$

Apliquemos o teorema da média ao integral da esquerda:

$$\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{\underline{\sigma}}u\,d\sigma=\frac{u(\xi,\eta,\zeta)}{\rho^2}\iint\limits_{\bar{\sigma}}d\sigma, \tag{2}$$

onde (ξ, η, ζ) é um ponto sobre a superfície da esfera de raio ρ e de centro no ponto $M(x_1, y_1, z_1)$.
Façamos tender ρ para zero: então, $(\xi, \eta, \zeta) \to u(x_1, y_1, z_1)$:

$$\frac{1}{\rho_2} \iint\limits_{\sigma} d\sigma = \frac{4\pi\rho^2}{\rho^2} = 4\pi.$$

Logo, quando $\rho \to 0$, obtém-se:

$$\frac{1}{\rho^2} \iint\limits_{\sigma} u \, d\sigma \to u(x_1, y_1, z_1) \, 4\pi.$$

Além disso, dado que o primeiro membro da igualdade (1) não depende de ρ, quando $\rho \to 0$, obtém-se, por fim:

$$\frac{1}{R^2} \iint\limits_{\sigma} u \, d\sigma = 4\pi u(x_1, y_1, z_1)$$

ou

$$u(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\sigma} u \, d\sigma.$$

Capítulo XVI

SÉRIES

§ 1. Soma duma série

Definição — 1. Seja dada uma sucessão numérica infinita (*)

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

A expressão

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \quad (1)$$

chama-se *série numérica,* sendo os números u_1, u_2, ..., u_n, ... os termos da série.

Definição — 2. À soma dos *n* primeiro termos de série chama-se *soma parcial* s_n:

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Consideremos as somas parciais:

$$s_1 = u_1,$$

$$s_2 = u_1 + u_2,$$

$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

Se o limite seguinte existir e for finito:

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n,$$

chama-se *soma da série* (1) e diz-se que a *série converge.*

Se $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ não existe (por exemplo $s_n \to \infty$ quando $n \to \infty$), diz-se que a série (1) *diverge e que não tem soma.*

---

* Diz-se que uma sucessão é dada quando se conhece a lei que permite calcular qualquer termo u_n, uma vez dado *n.*

Exemplos — Consideremos a série

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots \tag{2}$$

É uma *progressão geométrica* de primeiro termo a e de razão $q\,(a\neq 0)$. A soma dos n primeiros termos da progressão geométrica (quando $q\neq 1$) é igual a

$$s_n=\frac{a-aq^n}{1-q}$$

ou

$$s_n=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

1. Se $|q|<1$, $q^n\to 0$ quando $n\to\infty$ e, por conseguinte,

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}\right)=\frac{a}{1-q}.$$

Assim, quando $q<1$, a série (2) converge e a soma é

$$s=\frac{a}{1-q}.$$

2. Se $q>1$, $|q^n|\to\infty$ quando $n\to\infty$ e $\frac{a-aq^n}{1-q}\to\pm\infty$ quando $n\to\infty$, isto é, que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ não existe. Assim, quando $q>1$, a série (2) diverge.

3. Se $q=1$, a série (2) escreve-se

$$a+a+a+\ldots$$

Por conseguinte

$$s_n=na,\quad \lim_{n\to\infty} s_n=\infty,$$

a série diverge.

4. Se $q=-1$, a série (2) escreve-se

$$a-a+a-a+\ldots$$

e

$$s_n=\begin{cases} 0 \text{ se } n \text{ é par} \\ a \text{ se } n \text{ é ímpar,}\end{cases}$$

s_n não tem limite, a série diverge.

Assim, a progressão geométrica (de primeiro termo não nulo) converge, se, e sòmente se, a sua razão for menor que a unidade em valor absoluto.

Teorema — 1. *Se a série obtida, suprimindo em* (1) *vários termos, converge, a série proposta converge igualmente.*

Recìprocamente, se a série proposta converge, a série obtida suprimindo vários termos converge igualmente. Por outras palavras, não se afecta o carácter de convergência duma série suprimindo um número finito de termos.

Demonstração — Sejam s_n a soma dos n primeiro termos da série (1), c_k, a soma dos k termos suprimidos (notemos que se n for

suficientemente grande, todos os termos rejeitados estão compreendidos na soma s_n) e seja ainda σ_{n-k} a soma dos termos da série que entram em s_n mas não em c_k. Tem-se

$$s_n = c_k + \sigma_{n-k},$$

sendo c_k um número constante não dependente de n.

Resulta desta última relação que se $\lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k}$ existe, então, $\lim_{n\to\infty} s_n$ também existe; se $\lim_{n\to\infty} s_n$ existe, o mesmo se diga de $\lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k}$, o que demonstra o teorema.

Para terminar este parágrafo, indiquemos duas propriedades elementares das séries.

Teorema — 2. *Se a série*

$$a_1 + a_2 + \ldots \tag{3}$$

converge e se a sua soma é s, a série

$$ca_1 + ca_2 + \ldots, \tag{4}$$

em que c é um número arbitrário fixo, converge também e a sua soma é cs.

Demonstração — Sejam s_n e σ_n, respectivamente, as somas parciais de (3) e (4). Tem-se

$$\sigma_n = ca_1 + \ldots + ca_n = c(a_1 + \ldots + a_n) = cs_n.$$

Resulta que a soma parcial σ_n de (4) existe, porque

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (cs_n) = c \lim_{n\to\infty} s_n = cs.$$

Assim, a série (4) converge e a sua soma é cs.

Teorema — 3. *Se as séries*

$$a_1 + a_2 + \ldots \tag{5}$$

e

$$b_1 + b_2 + \ldots \,. \tag{6}$$

convergem e têm por somas $\bar{s}$ e $\bar{\bar{s}}$, as séries

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots \tag{7}$$

e

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots \tag{8}$$

convergem igualmente e têm por somas $\bar{s} + \bar{\bar{s}}$ e $\bar{s} - \bar{\bar{s}}$.

Demonstração — Mostremos a convergência da série (7). Designemos a sua soma parcial de índice n por s_n e as somas parciais de (5) e (6), respectivamente, por $\bar{s}_n$ e $\bar{\bar{s}}_n$; tem-se

$$\sigma_n = (a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n) =$$

$$= (a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_n) = \bar{s}_n + \bar{\bar{s}}_n.$$

Passando esta igualdade a limite quando $n \to \infty$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (\bar{s}_n + \bar{\bar{s}}_n) = \lim_{n\to\infty} \bar{s}_n + \lim_{n\to\infty} \bar{\bar{s}}_n = \bar{s} + \bar{\bar{s}}.$$

Assim, a série (7) converge e tem por soma $\bar{s} + \bar{\bar{s}}$.

Duma maneira semelhante se demonstra que a série (8) converge também e que tem por soma $\bar{s} - \bar{\bar{s}}$.

Diz-se que as séries (7) e (8) foram obtidas, somando e subtraindo termo a termo as séries (5) e (6).

§ 2. Condição necessária de convergência de uma série

Quando se estuda uma série, uma das questões fundamentais é a da convergência ou da divergência dessa série. Mais abaixo estabeleceremos critérios suficientes que resolvem esta questão. Propomo-nos, agora, estabelecer um critério necessário de convergência.

Teorema — Se uma série converge, o seu termo geral u_n tende para zero quando n tende para infinito.

Demonstração — Suponhamos que a série

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

converge, isto é, que se tem a igualdade

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

em que s e a soma da série (um número finito fixo); mas, então, tem-se, igualmente, a igualdade

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s,$$

porque n e $(n - 1)$ tendem para infinito ao mesmo tempo. Subtraindo termo a termo a segunda igualdade da primeira, obtém-se:

$$\lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = 0$$

Ora,

$$s_n - s_{n-1} = u_n.$$

Logo

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0,$$

c. q. d.

Corolário — *Se o termo geral u_n duma série não tende para zero quando $n \to \infty$, a série diverge.*

Exemplo — A série

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{n}{2n+1} + \dots$$

diverge, porque

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Notemos que o critério examinado dá uma condição necessária, mas não suficiente, isto é, *que uma série pode bem divergir mesmo* que o seu termo de ordem n tenda para zero.

Assim, a série seguinte, dita harmónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

diverge, se bem que

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Para o demonstrar, recopiemos um maior número de termos da série harmónica:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}} + \frac{1}{17} + \dots \qquad (1)$$

Escrevamos, ainda, a série auxiliar

$$1 + \frac{1}{2} + \overbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \overbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} +$$

$$+ \overbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}} +$$

$$+ \overbrace{\frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32}}^{\text{16 termos}} + \dots \qquad (2)$$

Constrói-se a série (2) como se segue: o seu primeiro termo é igual a 1, o segundo igual a $\frac{1}{2}$, o terceiro e o quarto igual a $\frac{1}{4}$, os quatro seguintes são iguais a $\frac{1}{8}$, os oito seguintes a $\frac{1}{16}$, os dezasseis seguintes iguais a $\frac{1}{32}$, etc.

Designemos por $s_n^{(1)}$ a soma dos n primeiros termos da série harmónica (1) e por $s_n^{(2)}$ a soma dos n primeiros termos da série (2).

Como cada termo da série (1) é maior que o correspondente termo da série (2) ou lhe é igual, tem-se para $n > 2$

$$s_n^{(1)} > s_n^{(2)}. \qquad (3)$$

Calculemos as somas parciais da série (2) para os valores n iguais a $2^1, 2^2, 2^3, 2^5, 2^4$:

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}\right)}_{\text{4 termos}} +$$

4

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right)}_{\text{8 termos}} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_{32} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}\right)}_{\text{4 termos}} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right)}_{\text{8 termos}} + \underbrace{\left(\frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{32}\right)}_{\text{16 termos}} = 1 + 5 \cdot \frac{1}{2};$$

calcula-se, do mesmo modo, $s_{2^6} = 1 + 6 \cdot \frac{1}{2}$, $s_{2^7} = 1 + 7 \cdot \frac{1}{2}$ e, em geral, $s_{2^k} = 1 + k \cdot \frac{1}{2}$.

Por conseguinte, as somas parciais da série (2) podem ser superiores a qualquer número positivo, fazendo k suficientemente grande, isto é, que

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{(2)} = \infty,$$

mas resulta, então, da relação (3) que

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{(1)} = \infty,$$

isto é, que a série harmónica (1) diverge.

§ 3. Comparação das séries com termos positivos

Sejam duas séries de termos *positivos*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{1}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \tag{2}$$

Temos os seguintes teoremas.

Teorema — 1. *Se os termos da série* (1) *não forem superiores aos correspondentes termos da série* (2), *isto é, se*

$$u_n \leqslant v_n \ (n = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{3}$$

e se (2) *converge a série* (1) *converge também.*

Demonstração — Designemos por s_n e σ_n as somas parciais da segunda série:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i, \qquad \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} v_i.$$

Resulta da condição (3) que

$$s_n \leqslant \sigma_n. \tag{4}$$

Como a série (2) converge, as suas somas parciais têm limites

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma.$$

Sendo positivos os termos das séries (1) e (2), tem-se $\sigma_n < \sigma$, e, em virtude da desigualdade (4),

$$s_n < \sigma.$$

Assim, demonstramos que as somas parciais s_n são limitadas Notemos que, quando n cresce, a soma parcial s_n cresce, e resulta

do facto que a sucessão das somas parciais é limitada e cresce quando tem um limite (*)

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

e, evidentemente,

$$s \leqslant \sigma.$$

O teorema 1 permite pronunciarmo-nos sobre a natureza de certas séries.

Exemplo — 1. A série

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots$$

converge, dado que os seus termos são mais pequenos que os termos correspondentes da série

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

que é uma série geométrica da razão $\frac{1}{2}$ a partir do segundo termo. A sua soma é $1\frac{1}{2}$. A série proposta converge e a sua soma é menor que $1\frac{1}{2}$.

Teorema — 2. *Se os termos da série* (1) *não forem inferiores aos correspondentes termos da série* (2), *isto é, se*

$$u_n \geqslant v_n, \tag{5}$$

e se a série (2) *diverge, a série* (1) *diverge igualmente.*

Demonstração — Resulta da condição (5) que

$$s_n \geqslant \sigma_n. \tag{6}$$

Como os termos da série (2) são positivos, a sua soma parcial σ_n cresce com n, e como diverge

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty.$$

Mas, então, em virtude da desigualdade (6),

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty,$$

a série (1) diverge.

---

* Para se confirmar que a variável s_n tem um limite lembremo-nos dum critério de existência do limite duma sucessão (ver cap. II, t. I): «uma variável limitada e crescente tem um limite». No nosso caso, a sucessão das somas s_n é limitada e desce, logo tem um limite, a série converge.

Exemplo — 2. A série

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

diverge, porque, a partir do segundo, os seus termos são superiores aos termos correspondentes da série harmónica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

que como se sabe diverge.

Nota — Os dois critérios que se acabam de dar (teorema 1 e 2) apenas são legítimos para as séries de termos positivos. Continua a vigorar quando faltam vários termos numa ou noutra série. Todavia, estes critérios já não são verdadeiros se uma qualquer das séries possuir termos negativos.

§ 4. Regra de Alembert

Teorema (regra de Alembert) — *Se numa série de termos positivos*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

a relação $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *tiver um limite finito* l *quando* $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l, \tag{2}$$

1. *a série converge quando* $l<1$,
2. *a série diverge quando* $l>1$

(se $l=1$, nada se pode dizer).

Demonstração — 1. Seja $l<1$. Consideremos o número q tal que $l<q<1$ (fig. 242).

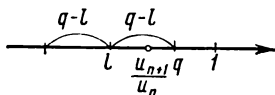



Fig. 342

Resulta da definição dos limites e da relação (2) que se tem para todos os n a partir dum certo número N, isto é, para $n \geqslant N$, a desigualdade

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<q. \tag{2'}$$

Com efeito, como a quantidade $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende para o limite l, pode-se tornar a diferença entre $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ e o número l (a partir dum certo N) inferior em valor absoluto a qualquer número positivo, em particular a $q - l$, isto é, que

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < q - l.$$

Esta última desigualdade implica (2'). Escrevamos esta igualdade para diversos n a partir de N:

$$\left.\begin{array}{l} u_{N+1} < qu_N, \\ u_{N+2} < qu_{N+1} < q^2 u_N, \\ u_{N+3} < qu_{N+2} < q^3 u_N, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Consideremos agora as duas séries

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots, \qquad (1)$$

$$u_N + qu_N + q^2 u_N + \dots \qquad (1')$$

(1') é uma progressão geométrica de razão positiva $q < 1$. Logo converge. Os termos da série (1), são a partir de u_{N+1}, inferiores

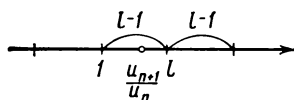



Fig. 343

aos termos da série (1'). Resulta do teorema 1 § 1 que a série (1) converge.

2. Seja $l > 1$.

Resulta de $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \; (l > 1)$ que a partir dum certo número N, isto é, para $n \geqslant N$, se tem a desigualdade

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

(fig. 343), ou $u_{n+1} > u_n$ para todos os $n \geqslant N$. Mas isso dizer que os termos da série crescem a partir do índice $N + 1$, logo o termo geral não tende para zero. A série diverge

Exemplo — 1. Estudar a natureza da série

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}+\ldots$$

Resolução — Tem-se

$$u_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}=\frac{1}{n!};\quad u_{n+1}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n(n+1)}=\frac{1}{(n+1)!};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}.$$

Por conseguinte,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

A série converge.

Exemplo — 2. Estudar a natureza da série

$$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}+\ldots$$

Resolução — Aqui, tem-se

$$u_n=\frac{2^n}{n};\quad u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{n+1};\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=2\frac{n}{n+1};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}2\frac{n}{n+1}=2>1.$$

A série diverge, de resto o seu termo geral u_n tende para infinito.

Nota — A regra de Alembert permite ver se uma série positiva converge sòmente no caso em que $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe e é diferente de 1. Se este limite não existir ou se $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, a regra de Alembert não permite concluir que a série converge ou que diverge, porque pode, então, tanto convergir como divergir.

Para determinar a natureza de uma tal série, recorrer-se-á a um outro critério.

Notemos, no entanto, que se $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ e se o quociente $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ for maior que a unidade para n suficientemente grande, a série diverge.

Com efeito, se $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, então $u_{n+1}>u_n$ e o termo geral não tende para zero quando $n\to\infty$.

Ilustremos o que foi dito com exemplos.

Exemplo — 3. Estudar a convergência da série

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$$

Resolução — Tem-se

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=1.$$

A série diverge, porque $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ para todo o n:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}>1.$$

Exemplo — 4. Apliquemos a regra de Alembert à série harmónia

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Tem-se $u_n=\frac{1}{n}$, $u_{n+1}=\frac{1}{n+1}$ e, por conseguinte,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Portanto, a regra de Alembert não permite dizer nada sobre a convergência ou divergência da série harmónica.

Mas estabeleceu-se doutro modo que esta série diverge.

Exemplo — 5 Estudar a convergência da série

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\,(n+1)}+\ldots$$

Resolução — Tem-se

$$u_n=\frac{1}{n\,(n+1)},\quad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\,(n+2)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,(n+1)}{(n+1)\,(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1.$$

A regra d' Alembert nada dá. Mas pode-se demonstrar que esta série converge por outras considerações. Com efeito,

$$\frac{1}{n\,(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

e pode-se recopiar a série dada sob a forma

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots$$

Reduzindo os termos semelhantes, obtém-se a expressão da soma parcial s_n:

$$s_n=1-\frac{1}{n+1}.$$

Por conseguinte,

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

a série converge e a sua soma é igual a 1.

§ 5. Regra de Cauchy

Teorema (regra de Cauchy) — *Sendo dada a série*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

de termos positivos, se a quantidade $\sqrt[n]{u_n}$ *tiver limite finito* l *quando* $n \to \infty$, *isto é, se se tiver*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l,$$

1. *a série convege se* $l < 1$
2. *a série diverge se* $l > 1$.

Demonstração — 1. Seja $l < 1$. Seja q um número tal que $l < q < 1$. Ter-se-á, a partir dum certo $n = N$.

$$|\sqrt[n]{u_n} - l| < q - l;$$

Daí resulta que

$$\sqrt[n]{u_n} < q$$

ou melhor

$$u_n < q^n$$

para todos os $n \geqslant N$.

Consideremos, agora, as duas séries:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots, \tag{1}$$

$$q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \ldots \tag{1'}$$

A série (1') converge porque os seus termos formam uma progressão geométrica decrescente. Os termos da série (1) são, a partir de u_N, inferiores aos respectivos termos de (1'). Logo a série (1) converge.

2. Suponhamos $l > 1$. Ter-se-á, a partir dum certo $n = N$

$$\sqrt[n]{u_n} > 1$$

ou melhor

$$u_n > 1.$$

A série diverge, evidentemente.

Exemplo — Estudar a convergência da série

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots$$

Resolução — Apliquemos a regra de Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

A série converge.

Nota — Tal como para a regra de Alembert o caso em que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l = 1$$

exige um estudo particular. A série pode, então, tanto convergir como divergir. Assim, para a série harmónica (que, como se sabe, diverge)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Para nos assegurarmos disso, mostremos que $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Log} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 0$. Com efeito,

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Log} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\operatorname{Log} n}{n}.$$

O numerador e o denominador desta fracção tendem para infinito. Apliquemos a regra d'Hospital:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Log} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\operatorname{Log} n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n}}{1} = 0.$$

Assim, $\operatorname{Log} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 0$, mas, então, $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$, isto é, que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

O mesmo se diga da série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

para a qual

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Mas esta série converge porque a partir do segundo, os seus termos serão inferiores aos da série convergente

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

(ver exemplo 5, § 4).

§ 6. Comparação com um integral

Teorema — *Seja a série de termos positivos não crescente*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (1)$$

isto é,

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant \ldots,$$

e seja $f(x)$ uma função contínua não crescente tal que

$$f(1) = u_1;\ f(2) = u_2;\ \ldots;\ f(n) = u_n. \qquad (2)$$

Pode-se, então, afirmar que:

1. *se o integral*

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

converge (ver § 7, cap. XI, t. I), *a série* (1) *converge igualmente;*

2. *se o integral diverge, a série* (1) *converge.*

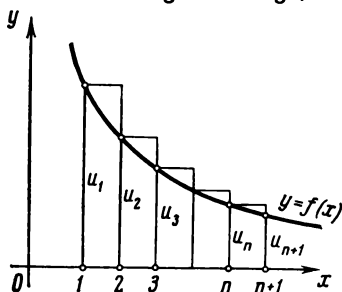



Fig. 344

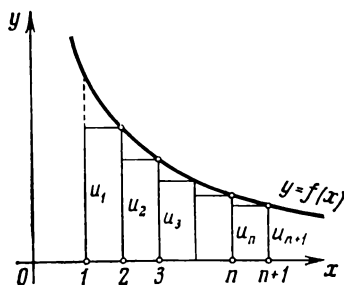



Fig. 345

Demonstração — Representemos os termos da série geomètricamente, reportando ao eixo das abcissas, os números dos termos 1, 2, 3, ...; n, $n+1$, ... e verticalmente os seus valores u_1, u_2, ..., u_n, (fig. 344).

Construàmos, sobre a mesma figura, o gráfico da função não crescente

$$y = f(x)$$

que satisfaz à condição (2).

Nota-se, na figura 344, que o primeiro rectângulo construído tem por base 1 e por altura $f(1) = u_1$. A área deste rectângulo é, pois, u_1. A área do segundo rectângulo é u_2, e a área do de ordem n e último rectângulo construído é u_n. A soma das áreas dos rectângulos construídos é igual à soma s_n dos n primeiros termos da série. Por outro

lado a figura em escada formada por estes rectângulos contém o domínio limitado pela curva $y = f(x)$ e as rectas $x = 1$, $x = n + 1$, $y = 0$; a área deste domínio é igual a $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$.

Por conseguinte,

$$s_n > \int_1^{n+1} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Consideremos, agora, a fig. 345. Aqui, o primeiro rectângulo construído tem por altura u_2 e a sua área é também u_2. A área do segundo rectângulo é u_3, etc. A área do último rectângulo construído é u_{n+1}. Por conseguinte, a área de todos os rectângulos construídos é igual à soma dos $(n + 1)$ primeiros termos da série menos o primeiro, ou seja, $s_{n+1} - u_1$. Por outro lado, como é fácil de ver, a figura em escada formada por estes rectângulos está compreendida no trapézio curvilíneo formado pela curva $y = f(x)$ e as rectas $x = 1$, $x = n + 1$, $y = 0$. A área deste trapézio curvilíneo é igual a $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$.

Logo

$$s_{n+1} - u_1 < \int_1^{n+1} f(x)\,dx,$$

donde

$$s_{n+1} < \int_1^{n+1} f(x)\,dx + u_1. \tag{4}$$

Consideremos, agora, os dois casos.

1. Suponhamos que o integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge, isto é, que tem um valor finito.

Como

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < \int_1^{\infty} f(x)\,dx,$$

tem-se, em virtude da desigualdade (4),

$$s_n < s_{n+1} < \int_1^{\infty} f(x)\,dx + u_1,$$

isto é, que a soma parcial s_n é limitada qualquer que seja n. Ora, ela cresce com n, porque todos os u_n são positivos. Logo s_n tem um limite finito quando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} s_n$$

a série converge.

2. Suponhamos em seguida que $\int_1^\infty f(x)\,dx = \infty$. Tal quer dizer que $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$ cresce indefinidamente com n. Mas, então, em virtude da desigualdade (3), s_n cresce também indefinidamente com n, isto é, a série diverge.

O teorema, está pois, completamente demonstrado.

Exemplo — Estudar a convergência da série

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

Resolução — Comparemos com o integral da função

$$f(x)=\frac{1}{x^p},$$

que satisfaz a todas as condições do teorema. Considermos o integral

$$\int_1^N \frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}\,x^{1-p}\Big|_1^N=\dfrac{1}{1-p}\,(N^{1-p}-1) \text{ para } p\neq 1.\\ \operatorname{Log} x\,\Big|_1^N=\operatorname{Log} N \text{ para } p=1.\end{cases}$$

Façamos tender N para infinito e estudemos a convergência do integral segundo os casos.

Poder-se-á, então, julgar da convergência do integral segundo os valores de p.

Se $p>1$, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1}$, o integral é finito, logo a série diverge.

Se $p<1$, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}=\infty$, o integral é infinito, a série diverge.

Se $p=1$, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\infty$, o integral é infinito, a série diverge.

Notemos que nem a regra d'Alembert nem a de Cauchy resolvem a questão da convergência desta série. Com efeito,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^p=1^p=1.$$

§ 7. Séries alternadas. Teorema de Leibniz

Considerámos, até agora, séries de termos positivos. Neste parágrafo vamos considerar séries cujos *sinais dos termos são alternados*, isto é, séries da forma

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots,$$

em que $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ são positivos.

Teorema de Leibniz — *Se numa série alternada*

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots \quad (u_n > 0), \tag{1}$$

os termos vão decrescendo

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots \tag{2}$$

e se

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0, \tag{3}$$

a série (1) *converge, a sua soma é positiva e não é superior ao primeiro termo.*

Demonstração — Consideremos a soma dos $n = 2m$ primeiros termos da série (1):

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Resulta da condição (2) que as expressões entre parêntesis são positivas. Logo a soma s_{2m} é positiva

$$s_{2m} > 0$$

e cresce com m.

Recopiemos, agora, esta soma sob a forma

$$s_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots$$
$$\ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

Em virtude da condição (2), cada expressão entre parêntesis é positiva, logo, subtraindo todas as expressões entre parêntesis de u_1, obtém-se um número inferior a u_1, isto é, que

$$s_{2m} < u_1.$$

Por conseguinte, estabelecemos que s_{2m} cresce com m e é limitada superiormente. Resulta que s_{2m} tem um limite s:

$$\lim_{m \to \infty} s_{2m} = s,$$

e

$$0 < s < u_1.$$

Todavia, não demonstrámos ainda que a série converge; demonstrámos sòmente que a sucessão das somas parciais pares tem um limite s. Demonstremos agora que as somas parciais ímpares tendem também para s.

Consideremos, para esse efeito, a soma dos $n = 2m + 1$ primeiros termos da série (1):

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}.$$

Como, segundo a condição (3), $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$, tem-se

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} s_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} s_{2m} = s.$$

Do mesmo modo, demonstramos que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ quer n seja par quer seja ímpar.

Logo a série converge.

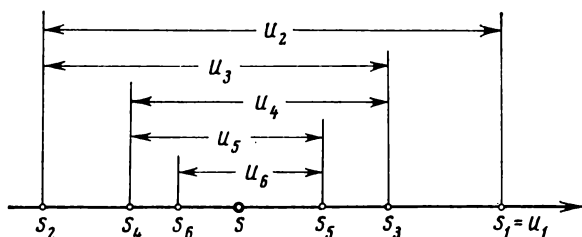



Fig. 346

Nota — 1. O teorema de Leibniz pode ser ilustrado geomètricamente como se segue. Reportemos ao eixo numérico as somas parciais (fig. 346):

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 - u_2 = s_1 - u_2, \quad s_3 = s_2 + u_3,$$

$$s_4 = s_3 - u_4, \quad s_5 = s_4 + u_5,$$

e assim sucessivamente.

Os pontos que representam as somas parciais tendem para um ponto s que representa a soma da série. As somas parciais pares encontram-se à esquerda de s, as somas parciais ímpares à direita de s.

Nota — 2. Se uma série alternada satisfaz à condição do teorema de Leibniz, não é difícil avaliar o erro cometido quando se substituir a sua soma s por uma soma parcial s_n. Isto equivale a desprezar todos os termos a partir de u_{n+1}. Mas estes termos formam uma série alternada cuja soma é, em valor absoluto, inferior ao primeiro termo

desprezado (u_{n+1}). Por conseguinte, o erro cometido quando se substitui s por s_n não ultrapassa em valor absoluto o primeiro termo desprezado.

Exemplo — 1. A série harmónica alternada

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

converge porque

$$1)\ 1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots,$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

A soma dos n primeiros termos desta série

$$s_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

difere da soma s da série por uma quantidade inferior a $\frac{1}{n+1}$.

Exemplo — 2. A série

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots$$

converge em virtude do teorema de Leibniz.

§ 8. Séries de termos de sinais quaisquer Convergência absoluta e semi-convergência

Uma série diz-se de *termos de sinais quaisquer* se se encontra entre os seus termos, quer termos positivos quer termos negativos.

As *séries alternadas* do parágrafo anterior são, evidentemente, um *caso particular* das séries de termos quaisquer.

Vamos examinar algumas propriedades das séries de termos de sinais quaisquer.

Contràriamente à convenção adoptada no parágrafo anterior, admitiremos daqui em diante que os números $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ podem ser quer negativos quer positivos.

Vamos dar, em primeiro lugar, um importante critério suficiente da convergência das séries de termos de sinais quaisquer.

Teorema — 1. *Se a série de termos de sinais quaisquer*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

é tal que a série formada com os valores absolutos dos seus termos

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{2}$$

converge, a série proposta também converge.

Demonstração — Sejam s_n e σ_n as somas dos n primeiros termos das séries (1) e (2).

Sejam ainda s'_n a soma de todos os termos positivos e s''_n a soma dos valores absolutos de todos os termos negativos contidos nos n primeiros termos da série proposta

$$s_n = s'_n - s''_n\,; \qquad \sigma_n = s'_n + s''_n.$$

Por hipótese, σ_n tem por limite σ; s'_n e s''_n são quantidades positivas crescentes inferiores a σ. Logo, têm limites s e s''. Resulta da relação $s_n = s'_n - s''_n$ que s_n também tem um limite que é igual a $s' - ''s$, isto é, que a série de termos de sinais quaisquer (1) converge.

O teorema demonstrado permite julgar da convergência de certas séries de termos de sinais variáveis. O estudo da questão da convergência duma tal série reduz-se, então, ao estudo duma tal série de termos positivos.

Consideremos dois exemplos.

Exemplo — 1. Estudar a convergência da série

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1^2} + \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2^2} + \frac{\operatorname{sen}3\alpha}{3^2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen}n\alpha}{n^2} + \ldots, \tag{3}$$

onde α é um número qualquer.

Resolução — Consideremos, paralelamente à série proposta, as séries

$$\left|\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1^2}\right| + \left|\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2^2}\right| + \left|\frac{\operatorname{sen}3\alpha}{3^2}\right| + \ldots + \left|\frac{\operatorname{sen}n\alpha}{n^2}\right| + \ldots \tag{4}$$

e

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \tag{5}$$

A série (5) converge (ver § 6). Os termos da série (4) não são superiores aos termos da série (5); logo (4) também converge. Resulta do teorema demonstrado que a série (3) converge também.

Exemplo — 2. Estudar a convergência da série

$$\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{3} + \frac{\cos 3\frac{\pi}{4}}{3^2} + \frac{\cos 5\frac{\pi}{4}}{3^3} + \ldots + \frac{\cos(2n-1)\frac{\pi}{4}}{3^n} + \ldots \tag{6}$$

Resolução — Consideremos, ao mesmo tempo que a série proposta, a série

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots \tag{7}$$

Esta série converge, porque é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$. Resulta daí a convergência da série dada (6) porque os seus termos são inferiores em valores absolutos aos termos da série (7).

Notemos que o critério de convergência demonstrado acima é simplesmente *suficiente* para que uma série de termos quaisquer converja, mas não necessária; existem séries com termos de sinais variáveis que convergem, mas cujas séries dos valores absolutos divergem.

Daí, ser útil introduzir as noções de *convergência absoluta* e *semi-convergência* para as séries de termos quaisquer e classificar assim estas séries.

Definição — A série de termos de sinais variáveis

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

diz-se *absolutamente convergente* se a série formada com os valores absolutos dos seus termos

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{2}$$

converge.

Se a série (1) converge, mas se a série (2) diverge, a série proposta (1) diz-se *semi-convergente* ou não *absolutamente convergente.*

Exemplo — 3. *A série harmónica alternada*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

é *semi-convergente,* porque a série dos valores absolutos é a série harmónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

que diverge. A série harmónica alternada converge, como resulta do critério de Leibniz.

Exemplo — 4. A série

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots$$

é *absolutamente convergente,* dado que a série dos valores absolutos

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

converge, como ficou estabelecido no § 4.

Utilizando a noção de convergência absoluta, formula-se muitas vezes o teorema 1 como se segue: *uma série absolutamente convergente é convergente.*

Indiquemos para terminar (sem demonstração) as seguintes propriedades das séries absolutamente convergentes e semi-convergentes.

Teorema — 2. *Se uma série converge absolutamente, ela converge absolutamente quando se muda arbitràriamente a ordem dos seus termos. A soma duma tal série não depende da ordem dos seus termos.*

Esta propriedade não se conserva para as séries semi-convergentes.

Teorema — 3. *Se uma série é semi-convergente, pode-se reagrupar os seus termos de maneira que a soma da nova série obtida seja igual a um número A dado antecipadamente. Além disso, pode-se reagrupar os termos duma série semi-convergente de maneira que essa nova série seja divergente.*

A demonstração destes teoremas sai do âmbito deste curso. Para ilustrar o facto de que se pode reagrupar os termos duma série semi-convergente de maneira a modificar a sua soma, consideremos o exemplo seguinte.

Exemplo — 5. A série alterada

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots \tag{8}$$

não converge absolutamente. Seja s a sua soma. Tem-se, evidentemente, $s>0$. Reagrupemos os termos de (8) de modo que um termo positivo seja seguido de dois termos negativos:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}}+\ldots \tag{9}$$

Mostremos que a série obtida converge, mas que a sua soma s' é duas vezes menor que a soma da série (8), isto é, que é igual a $\frac{1}{2}s$. Sejam s_n e s'_n as somas parciais das séries (8) e (9). Consideremos a soma dos $3k$ termos da série (9):

$$s'_{3k}=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}s_{2k}.$$

Por conseguinte,

$$\lim_{k\to\infty} s'_{3k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}s_{2k}=\frac{1}{2}s.$$

Depois

$$\lim_{k\to\infty} s'_{3k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(s'_{3k}+\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}s,$$

$$\lim_{k\to\infty} s'_{3k+2}=\lim_{k\to\infty}\left(s'_{3k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{4k+2}\right)=\frac{1}{2}s.$$

Logo, obtém-se

$$\lim_{n' \to \infty} s'_n = s' = \frac{1}{2} s.$$

Vê-se que a soma da série mudou após reagrupamento dos seus termos (diminuiu de metade).

§ 9. Séries de funções

Chama-se *série de funções* a toda a série na qual o termo geral é uma função duma variável x.

Consideremos a série de funções

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

Dando a x diferentes valores numéricos obtém-se diferentes séries numéricas que podem tanto convergir como divergir.

O conjunto dos valores de x para os quais a série de funções converge chama-se *domínio de convergência* dessa série.

É evidente que, no domínio de convergência duma série de funções, a sua soma é uma certa função de x.

Eis porque se a designa por $s(x)$.

Exemplo — Consideremos a série

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Esta série converge para todos os x no intervalo $(-1, 1)$, isto é, para todos os x que satisfaçam à condição $|x| < 1$. Para todo o valor de x deste intervalo, a soma da série é igual a $\frac{1}{1-x}$ (a soma duma progressão geométrica, decrescente de razão x). Por conseguinte, a série proposta define no intervalo $(-1, 1)$ a função

$$s(x) = \frac{1}{1-x}$$

que representa a soma da série, isto é, que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Designemos por $s_n(x)$ a soma dos n primeiros termos da série (1), se esta série converge e se a sua soma é $s(x)$, então,

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

onde $r_n(x)$ é o resto da série (1):

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + n_{n+2}(x) + \ldots$$

Temos para todos os x do intervalo de convergência $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$, logo

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} [s(x) - s_n(x)] = 0,$$

o que mostra que o resto $r_n(x)$ *duma série convergente tende para zero quando* $n \to \infty$.

§ 10. Séries majoráveis

Definição — A série de funções

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

diz-se *majorável* num certo domínio de variação de x, se existir uma série numérica convergente de termos positivos

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n + \ldots \qquad (2)$$

tal que se tenha para todo o x do domínio considerado

$$|u_1(x)| \leqslant \alpha_1, \ |u_2(x)| \leqslant \alpha_2, \ \ldots, \ |u_n(x)| \leqslant \alpha_n, \ \ldots \qquad (3)$$

Por outras palavras, uma série é *majorável* se cada um destes termos não for superior em valor absoluto ao termo correspondente duma série numérica convergente de termos positivos.

Assim, a série

$$\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots$$

é majorável sobre todo o eixo Ox. Com efeito, tem-se para todos os valores de x a relação

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

e sabe-se que a série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

converge.

Resulta imediatamente da definição que uma série majorável num certo domínio é absolutamente convergente em todos os pontos desse domínio (ver § 8). Além disso, numa série majorável goza da importante propriedade seguinte.

Teorema — *Suponhamos que a série de funções*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

é majorável sobre o segmento $[a, b]$. *Sejam* $s(x)$ *a soma desta série,* *a soma dos seus* n *primeiros termos. Então, corresponde a qualquer* $\varepsilon > 0$ *arbitràriamente pequeno um número* N *tal que para todos os* $n \geqslant N$

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon,$$

qualquer que seja x *sobre o segmento* $[a, b]$.

Demonstração — Designemos por σ a soma da série (2):

$$\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n + \alpha_{n+1} + \ldots,$$

Tem-se

$$\sigma = \sigma_n + \varepsilon_n,$$

em que σ_n é a soma dos n primeiros termos de (2) e ε_n o resto desta série:

$$\varepsilon_n = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots$$

Como esta série converge, tem-se

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \sigma$$

e, por conseguinte,

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Escrevamos, agora, a soma da série de funções (1) sob a forma

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

em que

$$s_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x),$$

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \ldots$$

Resulta da condição (3) que

$$|u_{n+1}(x)| \leqslant \alpha_{n+1}, \quad |u_{n+2}(x)| \leqslant \alpha_{n+2}, \quad \ldots$$

e, portanto,

$$|r_n(x)| \leqslant \varepsilon_n$$

para todos os x do domínio considerado.

Assim,

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon_n$$

para todo o x do segmento $[a, b]$ e $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$.

Nota — O resultado obtido pode ser ilustrado geomètricamente como se segue.

Consideremos o gráfico da função $y = s(x)$. Construamos uma faixa de largura $2\varepsilon_n$, sobre esta curva, isto é, construamos as curvas $y = s(x) + \varepsilon_n$ e $y = s(x) - \varepsilon_n$ (fig. 347).

Nestas condições qualquer que seja ε_n, o gráfico da função $s_n(x)$ ficará contido completamente nesta faixa que conterá igualmente os gráficos de todas as somas parciais seguintes.

Nota — Numa série de funções arbitrárias convergindo sobre o segmento $[a, b]$, não goza forçosamente da propriedade demonstrada

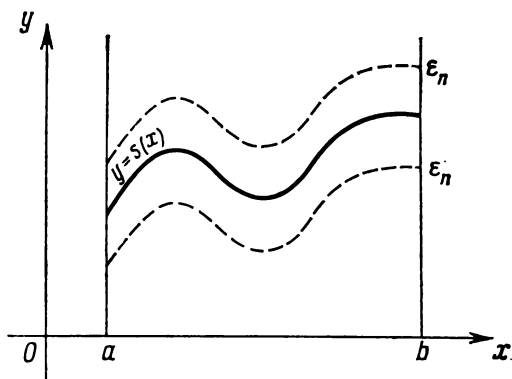



Fig. 347

no teorema. Mas existem séries não majoráveis que gozam da referida propriedade. Toda a série que goza desta propriedade diz-se *uniformemente convergente sobre o segmento* $[a, b]$.

Assim, *a série de funções* $u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ *diz-se uniformemente convergente sobre o segmento* $[a, b]$ *se corresponde a todo o* $\varepsilon > 0$ *arbitràriamente pequeno um número* N *tal que, para todo o* $n \geqslant N$, *se tenha*

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

qualquer que seja x *sobre o segmento* $[a, b]$.

Resulta do teorema demonstrado que uma série majorável é uniformemente convergente.

§ 11. Continuidade da soma duma série

Seja uma série de funções contínuas

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

convergente sobre um segmento $[a, b]$.

Demonstramos no capítulo II (t. I) um teorema sobre a continuidade da soma de um número finito de funções contínuas. Esta propriedade já não é conservada para a soma duma série (que contém

uma infinidade de termos). Certas séries de funções contínuas têm por soma funções descontínuas.

Exemplo — Consideremos a série

$$\left(x^{\frac{1}{3}}-x\right)+\left(x^{\frac{1}{5}}-x^{\frac{1}{3}}\right)+\left(x^{\frac{1}{7}}-x^{\frac{1}{5}}\right)+\ldots+\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)+\ldots$$

Os termos desta série (que figuram entre parêntesis) são funções contínuas qualquer que seja x. Mostremos que esta série converge e que a sua soma é uma função descontínua.

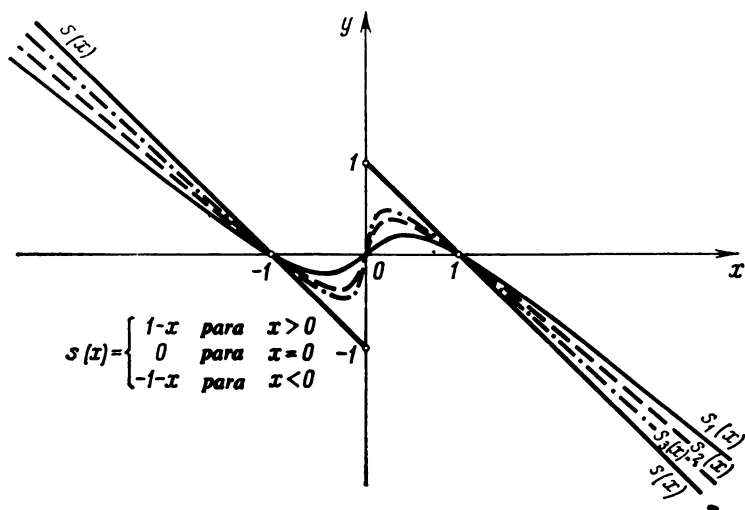



Fig. 348

Achemos a soma dos n primeiros termos desta série:

$$s_n = x^{\frac{1}{2n+1}} - x.$$

Calculemos a soma da série:

Se $x > 0$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x\right) = 1 - x,$$

Se $x < 0$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(-|x|^{\frac{1}{2n+1}} - x\right) = -1 - x$$

Se $x = 0$, tem-se $s_n = 0$, logo $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$. Tem-se, pois:

$$s(x) = 1 - x \quad \text{para } x > 0,$$
$$s(x) = -1 - x \quad \text{para } x < 0,$$
$$s(x) = 0 \quad \text{para } x = 0.$$

Assim, a soma da série considerada é uma função descontínua. Representamos o seu gráfico na figura 348, bem como das somas parciais $s_1(x)$, $s_2(x)$ e $s_3(x)$.

O teorema seguinte diz respeito às séries majoráveis.

Teomera — *A soma duma série de funções contínuas majorável sobre o segmento* $[a, b]$ *é uma função contínua sobre esse segmento.*

Demonstração — Consideremos a série de funções contínuas majorável sobre o segmento $[a, b]$

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots \tag{1}$$

Escrevamos a sua soma sob a forma

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

onde

$$s_n(x = u_1(x) + \dots + u_n(x),$$

e

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

Tomemos sobre o segmento $[a, b]$ um x arbitrário e demos-lhe um acréscimo Δx, tal que $x + \Delta x$ pertença a $[a, b]$.

Introduzamos as notações

$$\Delta s = s(x + \Delta x) - s(x);$$

$$\Delta s_n = s_n(x + \Delta x) - s_n(x);$$

então,

$$\Delta s = \Delta s_n + r_n(x + \Delta x) - r_n(x),$$

donde

$$|\Delta s| \leqslant |\Delta s_n| + |r_n(x + \Delta x)| + |r_n(x)|. \tag{2}$$

Esta igualdade é verdadeira para todo o n.

Para demonstrar a continuidade de $s(x)$, é preciso demonstrar que, qualquer que seja $\varepsilon > 0$ arbitràriamente pequeno, antecipadamente dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todos os $|\Delta x| < \delta$, se tenha $|\Delta s| < \varepsilon$.

Como a série proposta (1) é majorável corresponde a todo o $\varepsilon > 0$ um n tal que

$$|r_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{3}$$

qualquer que seja x sobre o segmento $[a, b]$. O número $x + \Delta x$ pertence ao segmento $[a, b]$, logo

$$|r_N(x + \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3'}$$

Por outra via, para o N escolhido, a soma parcial $s_N(x)$ é uma função contínua (a soma dum número finito de funções contínuas), e,

por conseguinte, pode-se escolher δ positivo tal que, para todo o Δx que satisfaça à condição $|\Delta x| < \delta$ se tenha

$$|\Delta s_N| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

Resulta das desigualdades (2), (3), (3'), (4)

$$|\Delta s| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

isto é,

$$|\Delta s| < \varepsilon, \text{ visto que } |\Delta x| < \delta,$$

o que prova que $s(x)$ é uma função contínua no ponto x (e, portanto, em qualquer ponto do segmento $[a, b]$).

Nota — Resulta do teorema demonstrado que se a soma duma série e descontínua sobre um segmento dado $[a, b]$, a série não pode ser majorada sobrè esse segmento. Assim, a série estudada como exemplo não pode ser majorada sobre todo o segmento que contém o ponto $x = 0$ no qual a série é descontínua.

Notemos, por fim, que o recíproco não é verdadeiro; existem séries não majoráveis sobre um segmento mas que convergem sobre esse segmento para uma função contínua. Em especial, qualquer série uniformemente convergente sobre o segmento $[a, b]$ (mesmo se não for majorável) tem por soma uma função contínua (se, bem entendido todos os seus termos fôrem contínuos).

§ 12. Integração e derivação de séries

Teorema — 1. *Seja a série de funções contínuas*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{1}$$

majorável sobre o segmento $[a, b]$ *e seja* $s(x)$ *a sua soma. O integral de* $s(x)$ *entre* α *e* x, *pertencente a* $[a, b]$, *é igual à soma dos integrais dos termos da série entre os mesmos limites:*

$$\int_\alpha^x s(x)\,dx = \int_\alpha^x u_1(x)\,dx + \int_\alpha^x u_2(x)\,dx + \ldots + \int_\alpha^x u_n(x)\,dx + \ldots$$

Demonstração — A função $s(x)$ pode ser posta sob a forma

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

ou

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + r_n(x).$$

Tem-se

$$\int_{\alpha}^{x} s(x)\,dx = \int_{\alpha}^{x} u_1(x)\,dx + \int_{\alpha}^{x} u_2(x)\,dx + \ldots$$

$$\ldots + \int_{\alpha}^{x} u_n(x)\,dx + \int_{\alpha}^{x} r_n(x)\,dx \tag{2}$$

(o integral duma soma finita de termos é igual à soma dos seus integrais).

Como a série proposta (1) é majorável, tem-se, qualquer que seja x, $|r_n(x)| < \varepsilon_n$, onde $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Logo

$$\left|\int_{\alpha}^{x} r_n(x)\,dx\right| \leqslant \pm \int_{\alpha}^{x} |r_n(x)|\,dx < \pm \int_{\alpha}^{x} \varepsilon_n\,dx =$$

$$= \pm\,\varepsilon_n (x - \alpha) \leqslant \varepsilon_n (b - a).$$

Como $\varepsilon_n \to 0$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{x} r_n(x)\,dx = 0.$$

Mas, deduz-se de (2)

$$\int_{\alpha}^{x} r_n(x)\,dx = \int_{\alpha}^{x} s(x)\,dx - \left[\int_{\alpha}^{x} u_1(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha}^{x} u_n(x)\,dx\right].$$

Por conseguinte,

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\int_{\alpha}^{x} s(x)\,dx - \left[\int_{\alpha}^{x} u_1(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha}^{x} u_n(x)\,dx\right]\right\} = 0$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_{\alpha}^{x} u_1(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha}^{x} u_n(x)\,dx\right] = \int_{\alpha}^{x} s(x)\,dx. \tag{3}$$

A soma entre parêntesis recto é uma soma parcial para a série

$$\int_{\alpha}^{x} u_1(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha}^{x} u_n(x)\,dx + \ldots \tag{4}$$

Como as somas parciais desta série têm um limite, esta série converge e a sua soma é igual, em virtude de (3), a $\int_{\alpha}^{x} s(x)\,dx$, ou seja

$$\int_{\alpha}^{x} s(x)\,dx = \int_{\alpha}^{x} u_1(x)\,dx + \int_{\alpha}^{x} u_2(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha}^{x} u_n(x)\,dx + \ldots$$

É a igualdade que nos propunhamos demonstrar.

Nota — 1. Se a série não for majorável, não é sempre possível integrar termo a termo, isto é, que o integral $\int_\alpha^x s(x)\,dx$ da soma da série (1) não é sempre igual à soma dos integrais dos seus termos (isto é, a soma (4)).

Teorema — 2. *Se a série*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{5}$$

de funções que têm derivadas contínuas sobre $[a, b]$, *converge sobre este segmento para* $s(x)$ *e se a série*

$$u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots, \tag{6}$$

formada com as derivadas dos seus termos, é majorável sobre este segmento, então, a soma da série das derivadas é igual à derivada da soma da série proposta:

$$s'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots$$

Demonstração — Designemos por $F(x)$ a soma da série (6):

$$F(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots$$

e demonstremos que

$$F(x) = s'(x).$$

Como a série (6) é majorável, tem-se, em virtude do teorema anterior,

$$\int_\alpha^x F(x)\,dx = \int_\alpha^x u_1'(x)\,dx + \int_\alpha^x u_2'(x)\,dx + \ldots + \int_\alpha^x u_n'(x)\,dx + \ldots$$

Integrando no segundo membro, obtém-se

$$\int_\alpha^x F(x)\,dx = [u_1(x) - u_1(\alpha)] +$$

$$+ [u_2(x) - u_2(\alpha)] + \ldots + [u_n(x) - u_n(\alpha)] + \ldots$$

Mas

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

$$s(\alpha) = u_1(\alpha) + u_2(\alpha) + \ldots + u_n(\alpha) + \ldots,$$

quaisquer que sejam x e α sobre o segmento $[a, b]$. Por conseguinte,

$$\int_\alpha^x F(x)\,dx = s(x) - s(\alpha).$$

Derivando em relação a x, os dois membros desta igualdade, obtém-se

$$F(x) = s'(x).$$

Por conseguinte, demonstramos que sendo as condições do teorema satisfeitas, a derivada da soma duma série é igual à soma das derivadas dos seus termos.

Nota — 2. É muito importante que a série derivada seja majorável, porque se esta condição não for observada, a derivação termo a termo pode-se tornar impossível.

Para confirmar este facto, consideremos um exemplo duma série majorável que não possa ser derivada termo a termo.

Consideremos a série

$$\frac{\operatorname{sen} 1^4 x}{1^2} + \frac{\operatorname{sen} 2^4 x}{2^2} + \frac{\operatorname{sen} 3^4 x}{3^2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} n^4 x}{n^2} + \ldots$$

Esta série converge para uma função contínua, porque é majorável. Com efeito, qualquer que seja x, os seus termos são inferiores, em valores absolutos, aos termos da série numérica convergente

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

Escrevamos a série formada com as derivadas dos termos da série proposta:

$$\cos x + 2^2 \cos 2^4 x + \ldots + n^2 \cos n^4 x + \ldots$$

Esta série diverge. Assim, quando $x = 0$, transforma-se em

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + \ldots$$

(poder-se-ia demonstrar que diverge não sòmente para $x = 0$).

§ 13. Séries inteiras ou séries de potências Intervalo de convergência

Definição — 1. Chama-se *série inteira* ou *série de potências* a uma série da forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

em que $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ são constantes dadas, chamadas coeficientes da série.

O conjunto dos pontos de convergência duma série é um intervalo, que se pode reduzir a um ponto. Para nos certificarmos disso, demonstraremos, em primeiro lugar, o teorema seguinte, fundamental na teoria das séries inteiras.

Teorema (d'Abel) — 1. a) *Se uma série inteira converge para um certo valor de* x_0, *não nulo, converge absolutamente para qualquer valor de* x *tal que*

$$|x| < |x_0|;$$

b) *Se a série diverge para um certo valor de* x_0', *diverge para qualquer* x *tal que*

$$|x| > |x_0'|.$$

Demonstração — 1. Como, por hipótese, a série numérica

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n + \ldots \tag{1'}$$

converge, o seu termo $a_nx_0^n \to 0$ quando $n \to \infty$, o que prova que existe um número positivo M tal que todos os termos da série são inferiores em valor absoluto a M.

Recopiemos a série (1) sob a forma

$$a_0 + a_1x_0\left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2x_0^2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + a_nx_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \ldots \tag{1a}$$

e consideremos a série dos valores absolutos dos seus termos:

$$|a_0| + |a_1x_0|\left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2x_0^2|\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots$$

$$\ldots + |a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \tag{2}$$

Os termos desta série são inferiores aos termos correspondentes da série

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \tag{3}$$

Quando $|x| < |x_0|$, esta última série é uma série geométrica de razão $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, logo, converge. Como os termos da série (2) são inferiores aos de (3), resulta que a série (2) converge também, o que significa que a série (1a) ou (1) converge absolutamente.

2. Já não é difícil, agora, a segunda parte do teorema: suponhamos que a série (1) diverge num certo ponto x_0'. Então, ela divergirá também em qualquer ponto x tal que $|x| > |x_0'|$. Com efeito, se ela convergisse num certo ponto x que satisfaça a esta condição, em

virtude da primeira parte do teorema, convergiria igualmente no ponto x_0', porque $|x_0'| < |x|$. Mas, isto é contrário à hipótese que a série diverge no ponto x_0'. Logo a série diverge também no ponto x. O teorema está completamente demonstrado.

O teorema d'Abel permite julgar da disposição dos pontos de convergência e de divergência duma série inteira. Com efeito, se x_0 é um ponto de convergência, todos os pontos do intervalo $(-|x_0|, |x_0|)$ são pontos de convergência absoluta. Se x_0' é um ponto de divergência, toda a semi-recta à direita de $|x_0'|$ e a semi-recta à esquerda de $-|x_0'|$ são constituídos de pontos de divergência.

a série converge

$-R$ 0 R

a série diverge *a série diverge*

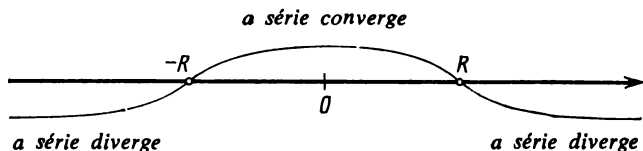



Fig. 349

Isto permite concluir que existe um número R tal que os pontos $|x| < R$ são pontos de convergência absoluta, e os pontos $|x| > R$ pontos de divergência.

Tem-se, pois, o teorema seguinte sobre a estrutura do conjunto dos pontos de convergência duma série inteira.

Teorema — 2. *O conjunto dos pontos de convergência duma série inteira é um intervalo centrado sobre a origem das coordenadas.*

Definição — 2. Chama-se *intervalo de convergência* duma série inteira ao intervalo compreendido entre os pontos $-R$ e $+R$ tal que a série converge, e mesmo absolutamente, nos pontos x desse intervalo e diverge nos pontos x que lhe são exteriores (fig. 349). O número R chama-se *raio de convergência* da série inteira.

Nas extremidades do intervalo (isto é, nos pontos $x = R$ e $x = -R$), a questão de convergência ou de divergência da série proposta deve ser objecto dum estudo especial.

Notemos que para certas séries o intervalo de convergência se reduz a um ponto ($R = 0$) e para outros estende-se a todo o eixo Ox ($R = \infty$).

Indiquemos um modo para determinar o raio de convergência duma série inteira.

Consideremos a série

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (1)$$

e formemos a série dos valores absolutos dos seus termos:

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + |a_3||x|^3 +$$
$$+ |a_4||x|^4 + \ldots + |a_n||x|^n + \ldots \quad (4)$$

Para determinar a convergência desta última série (de termos positivos) apliquemos a regra d'Alembert.

Suponhamos que existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = L|x|.$$

Então, segundo a regra d'Alembert, a série (4) converge $L|x| < 1$, isto é, para $|x| < \frac{1}{L}$, e diverge quando $L|x| > 1$, isto é, para

$$|x| > \frac{1}{L}.$$

Por conseguinte, a série (1) converge absolutamente para $|x| < \frac{1}{L}$. Se $|x| > \frac{1}{L}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |x| L > 1$, e a série (4) diverge, o seu termo geral não tende para zero (*).

Mas, então, o termo geral da série inteira (1) não tende mais para zero, o que significa, em virtude do critério de convergência necessário, que esta série inteira diverge $\left(\text{quando } |x| > \frac{1}{L}\right)$.

Resulta do que precede que o intervalo $\left(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right)$ é o intervalo de convergência da série inteira (1), isto é, que

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Duma maneira análoga, pode-se também servir-se da regra de Cauchy para determinar o intervalo de convergência duma série inteira. Obtém-se, então,

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

(*) Lembremos que durante a demonstração da regra d'Alembert (ver § 4) notamos que se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, o termo geral crescia, logo não tendia para zero.

Exemplo — 1. Determinar o intervalo de convergência da série

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots$$

Resolução — Aplicando a regra d'Alembert, obtém-se

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right|=|x|.$$

Por conseguinte, a série converge para $|x|<1$ e diverge para $|x|>1$. A regra d'Alembert nada dá nos pontos fronteiriços do intervalo $(-1, 1)$. Mas vê-se directamente que a série diverge nos pontos $x=\pm 1$.

Exemplo — 2. Determinar o intervalo de convergência da série

$$\frac{2x}{1}-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\ldots$$

Resolução — Apliquemos a regra d'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(2x)^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{(2x)^n}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right||2x|=|2x|.$$

A série converge quando $|2x|<1$, isto é, se $|x|<\frac{1}{2}$; converge no ponto $x=\frac{1}{2}$ e diverge no ponto $x=-\frac{1}{2}$.

Exemplo — 3. Determinar o intervalo de convergência da série

$$x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Resolução — Apliquemos a regra d'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right|=0<1.$$

Como o limite não depende de x e como é menor que 1, a série converge qualquer que seja x.

Exemplo — 4. A série $1+x+(2x)^2+(3x)^3+\ldots+(nx)^n+\ldots$ diverge qualquer que seja x, excepto $x=0$, porque $(nx)^n\longrightarrow\infty$ quando $n\to\infty$ qualquer que seja x não nulo.

Teorema — 3. *Uma série inteira*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{1}$$

é majorável sobre o segmento $[-\rho, \rho]$ *contido no seu intervalo de convergência.*

Demonstração — Por hipótese, tem-se $\rho<R$ (fig. 350) e, portanto, a série numérica (de termos positivos)

$$|a_0|+|a_1|\rho+|a_2|\rho^2+\ldots+|a_n|\rho^n \tag{5}$$

converge. Mas, quando $|x| < \rho$, os termos da série (1) não são superiores em valores absolutos aos termos correspondentes de (5). Logo a série (1) é majorável sobre o segmento $[-\rho, \rho]$.

Corolário — 1. *A soma duma série inteira é uma função contínua sobre todo o segmento completamente contido no intervalo de convergência.*

Intervalo de convergência

$-R$ $-\rho$ 0 ρ R

Intervalo de majoração

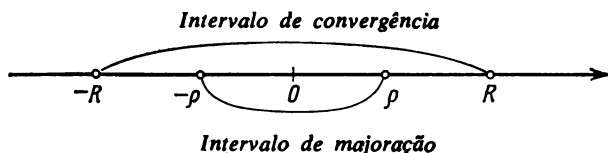



Fig. 350

Com efeito, a série é majorável sobre este segmento e os seus termos são funções contínuas de x. Por conseguinte, em virtude do teorema 1, § 11, a soma desta série é uma função contínua.

$-\rho$ ρ

$-R$ α 0 β R

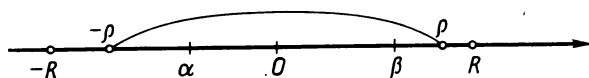



Fig. 351

Corolário — 2. *Se os limites de integração α, β pertencerem ao intervalo de convergência duma série inteira, o integral da soma da série é igual à soma dos integrais dos termos da série.* Com efeito, o intervalo de integração pode ser contido no segmento $[-\rho, \rho]$, onde a série é majorável (fig. 351) (ver o teorema 2, § 12 sobre a integração das séries majoráveis).

§ 14. Derivação de séries inteiras

Teorema — 1. *Se $(-R, R)$ for o intervalo de convergência da série inteira*

$$s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \tag{1}$$

a série

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots \tag{2}$$

deduzida de (1) por derivação termo a termo, admite o mesmo intervalo de convergência; além disso, tem-se

$$\varphi(x) = s'(x) \text{ quando } |x| < R,$$

isto é, que no intervalo de convergência, a derivada da soma da série inteira (1) é igual à soma da série obtida derivando termo a termo a série (1).

Demonstração — Demonstremos que a série (2) é majorável sobre todo o segmento $[-\rho, \rho]$ que pertence completamente ao intervalo de convergência.

$-R \quad -\rho \quad 0 \quad x \quad \rho \quad \xi \quad R \quad x_2 \quad x_1$

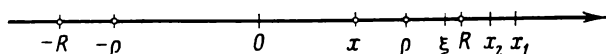



Fig. 352

Tomemos um ponto ξ tal que $\rho < \xi < R$ (fig. 352). A série (1) converge neste ponto, logo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \xi^n = 0$, e existe uma constante M tal que

$$|a_n \xi^n| < M \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Se $|x| \leqslant \rho$, tem-se

$$|na_n x^{n-1}| \leqslant |na_n \rho^{n-1}| = n|a_n \xi^{n-1}| \left|\frac{\rho}{\xi}\right|^{n-1} < n\frac{M}{\xi}q^{n-1},$$

onde

$$q = \frac{\rho}{\xi} < 1.$$

Assim, quando $|x| \leqslant \rho$, os termos da série (2) são inferiores em valores absolutos aos termos da série numérica positiva

$$\frac{M}{\xi}(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots).$$

Mas, como o mostra a regra d'Alembert, esta última série converge:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nq^{n-1}}{(n-1)q^{n-2}} = q < 1.$$

Logo a série (2) é majorável sobre o segmento $[-\rho, \rho]$ e, em virtude do teorema (2), § 12, a sua soma é a derivada da soma da série proposta sobre o segmento $[-\rho, \rho]$, isto é,

$$\varphi(x) = s'(x).$$

Como se pode encerrar todo o ponto interior do intervalo $(-R, R)$ num certo segmento $[-\rho, \rho]$, resulta que a série (2) converge em qualquer ponto interior do intervalo $(-R, R)$.

Mostremos que a série (2) diverge na vizinhança do intervalo $(-R, R)$. Admitamos que a série (2) converge para $x_1 > R$. Integrando termo a termo no intervalo $(0, x_2)$ onde $R < x_2 < x_1$, concluir-se-ia que a série (1) convergiria no ponto x_2, o que contradiz as condições do teorema. Por conseguinte, o intervalo $(-R, R)$ é o

intervalo de convergência da série (2). O teorema está completamente demonstrado.

A série (2) pode ser de novo derivada termo a termo, e será lícito continuar este procedimento à vontade. De modo que:

Teorema — 2. *Se uma série inteira converge no intervalo* $(-R, R)$, *a sua soma representa uma função que tem no intervalo de convergência, derivadas de qualquer ordem n, sendo cada uma delas a soma da série proposta; além disso, o intervalo de convergência de cada série obtida por derivação é também o intervalo de convergência da série proposta* $(-R, R)$.

§ 15. Séries de potências de $x - a$

Chama-se também série de potências a uma série da forma

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots, \tag{1}$$

onde as constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n \ldots$ são igualmente chamadas os coeficientes da série. Os termos desta série contêm as potências crescentes de $x - a$.

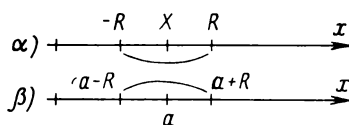



Fig. 353

Se $a = 0$, obtém-se uma série de potências de x, que é, pois, um caso particular da série (1).

Para determinar o domínio de convergência da série (1), façamos a mudança de variável

$$x - a = X.$$

A série (1) transforma-se, após esta substituição,

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n + \ldots, \tag{2}$$

que é uma série de potências de X.

Seja $-R < X < R$ o intervalo de convergência da série (2) (fig. 353, α). Resulta daí que a série (1) convergirá para os x que verificam a desigualdade $-R < x - a < R$ ou a $-R < x < a + R$. Como a série (2) diverge para $|X| > R$, a série (1) divergirá para $|x - a| > R$, isto é, na vizinhança do intervalo $a - R < x < a + R$ (fig. 353, β).

Por conseguinte, o intervalo de convergência da série (1) é o intervalo $(a - R, a + R)$ tendo por centro o ponto a. Todas as propriedades duma série inteira em x no intervalo de convergência $(-R, R)$ são completamente conservadas para uma série inteira de $x - a$ no intervalo de convergência $(a - R, a + R)$. Assim, integrando termo a termo a série inteira (1), os limites de integração pertencentes ao intervalo de convergência $(a - R, a + R)$, obtém-se uma série cuja

0 1 2 3 x

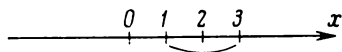



Fig. 354

soma é igual ao integral da soma da série proposta (1). Se se derivar termo a termo a série inteira (1), sendo x tomado no intervalo de convergência $(a - R, a + R)$, obtém-se uma série cuja soma é igual à derivada da soma da série proposta (1).

Exemplo — Achar o domínio de convergência da série

$$(x-2)+(x-2)^2+(x-2)^3+\ldots+(x-2)^n+\ldots$$

Resolução — Fazendo $x - 2 = X$, obtém-se a série

$$X+X^2+X^3+\ldots+X^n+\ldots$$

Esta série converge para $-1 < X < +1$. Logo, a série proposta converge para x tais que $-1 < x - 2 < 1$, isto é, para $1 < x < 3$ fig. 354).

§ 16. Séries de Taylor e de Maclaurin

Mostrámos no § 6, cap. IV (t. I) que uma função $f(x)$ que possua derivadas até à ordem $n+1$ inclusivé na vizinhança do ponto $x = a$ (isto é, no intervalo que contém o ponto $x = a$) admitia nesta vizinhança o desenvolvimento seguinte de Taylor

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x), \tag{1}$$

onde o resto $R_n(x)$ era calculado segundo a fórmula

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)],\quad 0<\theta<1.$$

Se a função $f(x)$ é indefinidamente derivável na vizinhança do ponto $x = a$, poder-se-á tomar n arbitràriamente grande na fórmula de Taylor. Suponhamos que o resto R_n tende para zero no domínio considerado quando $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$$

Sendo assim, fazendo tender $n \to \infty$ na fórmula (1), obtém-se à direita uma série com uma infinidade de termos dita *série de Taylor*:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots \tag{2}$$

Esta última igualdade apenas está certa se $R_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$. Então, a série do segundo membro converge e a sua soma é igual à função $f(x)$. Mostremos que assim é:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

onde

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Como, por hipótese, $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, tem-se

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} P_n(x).$$

Ora, $P_n(x)$ é uma soma parcial da série (2); o seu limite é igual à soma da série do segundo membro da igualdade (2). A igualdade (2) é, pois, legítima:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

Resulta, do que antecede, que *a série de Taylor representa a função dada $f(x)$, se e só se,* $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$. *Se* $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) \neq 0$, a série não representa a função dada, se bem que possa convergir (para uma outra função).

Se, na série de Taylor, se fizer $a = 0$, obtém-se num caso particular desta série, chamada *série de Maclaurin*:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots \tag{3}$$

Se se escrever formalmente a série de Taylor duma dada função e se se quiser certificar que ela representa efectivamente esta função, será preciso demonstrar que o resto tende para zero bem como ainda comprovar, duma maneira ou doutra, que a série escrita converge para a função dada.

Notemos que, para cada função elementar definida no § 8, cap. I (t. I), existe um a e um R tais que, no intervalo $(a - R, a + R)$, ela se desenvolve em série de Taylor ou (se $a = 0$) de Maclaurin.

§ 17. Exemplos de desenvolvimento de funções em séries

1. *Desenvolvimento em série de Maclaurin de $f(x) = \operatorname{sen} x$.*

No § 7, cap. IV (t. I), obtivemos a fórmula

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x).$$

Como se demonstrou que $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n}(x) = 0$, obtém-se, tendo em conta o que foi dito no parágrafo anterior, o desenvolvimento de sen x em série de Maclaurin:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \tag{1}$$

Como o resto tende para zero qualquer que seja x, a série proposta converge e a sua forma representa a função $\operatorname{sen} x$ qualquer que seja x.

A figura 355 representa o gráfico da função $\operatorname{sen} x$ e das três primeiras somas parciais da série (1).

Recorre-se a esta série para calcular $\operatorname{sen} x$ para diversos valores de x.

Calculemos, por exemplo, sen 10° a menos de 10^{-5} Dado que $10^\circ = \frac{\pi}{18} = 0{,}174533$, tem-se

$$\operatorname{sen} 10^\circ = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^7 + \ldots$$

Limitando-nos aos dois primeiros termos, obtém-se a igualdade seguinte aproximada:

$$\sin \frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3;$$

o erro δ é, em valor absoluto, inferior ao primeiro termo desprezado:

$$\delta < \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 < \frac{1}{120}(0,2)^5 < 4\cdot 10^{-6}.$$

Se se calcular cada termo da expressão do sen $\frac{\pi}{18}$ tomando 6 decimais, obtém-se

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{18} = 0,173647.$$

Pode-se garantir as quatro primeiras decimais.

2. *Desenvolvimento em série de Maclaurin da função* $f(x) = e^x$.

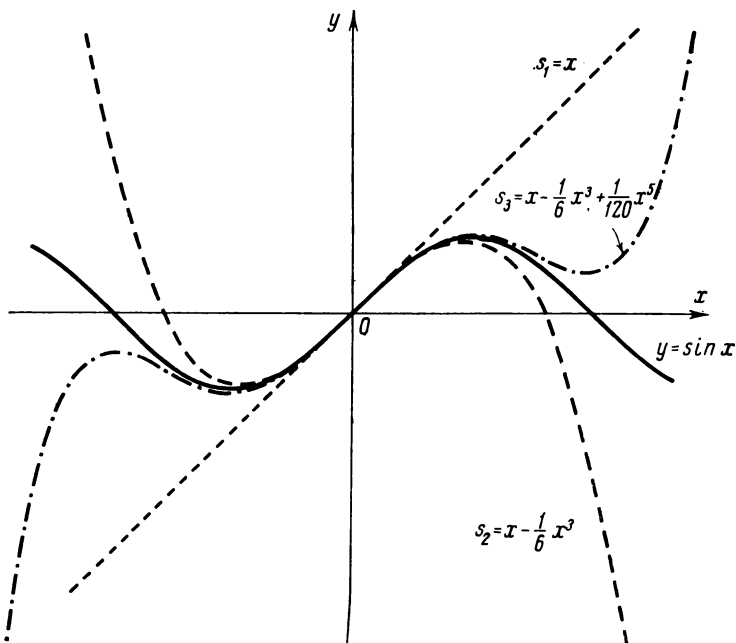



Fig. 355

Tendo em conta, § 7 do cap. IV (t. I), vem:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \tag{2}$$

porque, como se demonstrou, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ qualquer que seja x a série converge para todos os x e representa a função e^x.

3. *Desenvolvimento em série de Maclaurin da função $f(x) = \cos x$.*

Deduz-se do que foi dito no § 7, cap. IV, (t. I) que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots; \tag{3}$$

a série converge para todos os x e representa a função $\cos x$.

§ 18. Fórmulas de Euler

Até agora, consideramos séries de termos reais e deixámos à margem as séries de termos complexos que sai fora do âmbito deste livro, limitando-nos a examinar um exemplo importante.

Definimos, no cap. VII (t. I), a função e^{x+iy} pela igualdade

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Fazendo $x = 0$, obtém-se a fórmula de Euler:

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

Se se definir a função exponencial e^{iy} de expoente imaginário por meio da fórmula (2) do parágrafo 17, representando a função e^x sob a forma de série inteira, encontra-se a igualdade de Euler. Com efeito, definamos e^{iy} substituindo na igualdade (2) do § 17 iy por x:

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \ldots + \frac{(iy)^n}{n!} + \ldots \tag{1}$$

Como $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, etc., obtém-se

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \ldots$$

Separemos as partes reais e imaginárias desta série

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \ldots\right).$$

As expressões entre parêntesis são as séries inteiras de $\cos y$ e de $\operatorname{sen} y$ (ver as fórmulas (3) e (1) do parágrafo anterior). Por conseguinte,

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

Voltamos a encontrar a *fórmula de Euler.*

§ 19. Fórmula geral do binómio

1. Desenvolvamos em série de Maclaurin a função

$$f(x) = (1 + x)^m,$$

sendo m uma constante arbitrária.

Como o cálculo do resto apresenta algumas dificuldades, procederemos doutro modo para encontrar o desenvolvimento em série desta função.

Tendo em conta que a função $f(x) = (1 + x)^m$ satisfaz à equação diferencial

$$(1 + x) f'(x) = mf(x) \qquad (1)$$

e à condição

$$f(0) = 1,$$

procuremos uma série inteira cuja soma $s(x)$ satisfaça à equação (1) e à condição $s(0) = 1$:

$$s(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \text{(*)}. \qquad (2)$$

Substituindo esta série na equação (1), obtém-se:

$$(1 + x)(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots) =$$
$$= m(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots).$$

Identificando os coeficientes das mesmas potências de x dum e doutro lado da igualdade, encontra-se:

$$a_1 = m\,;\ \ a_1 + 2a_2 = ma_1\,;\ \ \ldots\,;\ \ na_n + (n + 1)\,a_{n+1} = ma_n\,;\ \ \ldots$$

Donde se obtém, para os coeficientes da série, a expressão

$$a_0 = 1\,;\quad a_1 = m\,;\quad a_2 = \frac{a_1(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2}\,;$$

$$a_3 = \frac{a_2(m-2)}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}\,;\ \ldots\,;$$

$$a_n = \frac{m(m-1)\ldots[m-n+1]}{1 \cdot 2 \ldots n}\,;\ \ldots$$

São os coeficientes da série do binómio.

(*) Tomamos o termo constante igual à unidade, vista a condição $s(0) = 1$.

Substituindo-os na fórmula (2), obtém-se:

$$s(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \ldots n} x^n + \ldots \qquad (3)$$

Se m é um inteiro positivo, os coeficientes de x^{m+1} e das potências superiores são nulos e a série reduz-se a um polinómio. Se m é fraccionário ou um inteiro negativo, tem-se uma série com uma infinidade de termos.

Determinemos o raio de convergência da série (3):

$$u_{n+1} = \frac{m(m-1)\ldots[m-n+1]}{n!} x^n,$$

$$u_n = \frac{m(m-1)\ldots[m-n+2]}{(n-1)!} x^{n-1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(n-1)!}{m(m-1)\ldots(m-n+2)\,n!} x \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{m-n+1}{n} \right| |x| = |x|.$$

De modo que a série (3) converge para $|x| < 1$.

No intervalo $(-1, 1)$ a série (2) representa uma função $s(x)$ que satisfaz a equação diferencial (1) e à condição

$$s(0) = 1.$$

Como existe apenas uma única função que satisfaz a equação diferencial (1) com a condição inicial $s(0) = 1$, resulta que a soma da série (3) é idênticamente igual à função $(1 + x)^m$, e obtém-se o desenvolvimento

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots \qquad (3')$$

Em especial, se $m = -1$, tem-se

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \tag{4}$$

Se $m = \frac{1}{2}$,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots \tag{5}$$

Se $m = -\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \ldots \tag{6}$$

2. Apliquemos o desenvolvimento do binómio ao desenvolvimento doutras funções. Desenvolvamos em série de Maclaurin a função

$$f(x) = \text{arc sen } x.$$

Substituindo x por $-x^2$, na igualdade (6), obtém-se:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 +$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}x^{2n} + \ldots$$

Em virtude do teorema sobre a integração das séries inteiras, tem-se para $|x| < 1$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen } x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Esta série converge no intervalo $(-1, 1)$. Poder-se-ia demonstrar que a série converge igualmente quando $x = \pm 1$ e que a soma correspondente a estes valores representa arc sen x. Então, fazendo $x = 1$, obtém-se esta fórmula para calcular π:

$$\text{arc sen } 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots$$

§ 20. Desenvolvimento da função log $(1+x)$ em série inteira. Cálculo de logaritmos

Integrando a igualdade (4) do § 19 de 0 a x (com $|x| < 1$), obtém-se:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)\, dx$$

ou

$$\operatorname{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad (1)$$

Esta igualdade é verdadeira no intervalo $(-1, 1)$.

Se se substituir x por $-x$ nesta fórmula, obtém-se a série:

$$\operatorname{Log}(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots \qquad (2)$$

que converge no intervalo $(-1, 1)$.

As séries (1) e (2) permitem calcular os logaritmos de números compreendidos entre zero e dois. Indiquemos sem o demonstrar que o desenvolvimento (1) subsiste para $x = 1$.

Vamos dar uma fórmula que permita calcular os logaritmos naturais dos números inteiros.

Como a diferença termo a termo de duas séries convergentes é uma série convergente (ver § 1, teorema 3), obtém-se, subtraindo termo a termo (2) de (1):

$$\operatorname{Log}(1+x) - \operatorname{Log}(1-x) =$$

$$= \operatorname{Log}\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right].$$

Façamos em seguida $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$; tem-se $x = \frac{1}{2n+1}$. Para qualquer $n > 0$, tem-se $0 < x < 1$, logo

$$\operatorname{Log}\frac{1+x}{1-x} = \operatorname{Log}\frac{n+1}{n} = 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots\right],$$

donde

$$\operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log} n =$$

$$= 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots\right]. \qquad (3)$$

Para $n = 1$, deduz-se

$$\operatorname{Log} 2 = 2\left[\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots\right].$$

Para calcular $\log 2$ com a precisão desejada δ, é preciso calcular a soma parcial s_p tomando um número p de termos tal que a soma dos termos desprezados (isto é, o erro R_p cometido, substituindo por s_p) seja inferior ao erro admitido δ. Calculemos, para esse efeito, o erro R_p :

$$R_p = 2\left[\frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+1}} + \frac{1}{(2p+3)\,3^{2p+3}} + \frac{1}{(2p+5)\,3^{2p+5}} + \ldots\right].$$

Como os números $2p+3$, $2p+5$, ... são superiores a $2p+1$, aumentamos o valor de cada fracção quando substituímos estes números por $2p+1$. Logo,

$$R_p < 2\left[\frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+1}} + \frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+3}} + \frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+5}} + \ldots\right],$$

ou

$$R_p < \frac{2}{2p+1}\left[\frac{1}{3^{2p+1}} + \frac{1}{3^{2p+3}} + \frac{1}{3^{2p+5}} + \ldots\right].$$

Temos, entre parêntesis recto, uma série geométrica de razão $\frac{1}{9}$. A soma desta série é

$$R_p < \frac{2}{2p+1}\,\frac{\frac{1}{3^{2p+1}}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{(2p+1)\,3^{2p-1}4}. \qquad (4)$$

Se se quiser agora calcular log 2, por exemplo, a menos de 0,0000001, é preciso escolher p de modo que se tenha $R_p < 0{,}0000001$. Chega-se lá, tomando p de modo que o segundo membro da desigualdade (3) seja inferior a 0,0000001. Verifica-se que basta fazer $p = 8$. Assim, a menos de 0,0000001, tem-se

$$\operatorname{Log} 2 \approx s_8 = 2\left[\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9} + \frac{1}{11\cdot 3^{11}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{13\cdot 3^{13}} + \frac{1}{15\cdot 3^{15}}\right] = 0{,}6931471.$$

A resposta é $\log 2 = 0{,}6931471$, com sete décimais exactas.

Fazendo na fórmula (3) $n = 2$, obtém-se:

$$\operatorname{Log} 3 = \operatorname{Log} 2 + 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} + \ldots\right] = 1{,}098612, \text{ etc.}$$

Podemos, pois, calcular os logaritmos *naturais* de qualquer inteiro.

Para obter os logaritmos *decimais* basta servir-se da relação (ver § 8, cap. II, t. I)

$$\log N = M \operatorname{Log} N,$$

com $M = 0{,}434294$. Obtém-se, assim, $\operatorname{Log} 2 = 0{,}6931472$, $\log 2 = 0{,}30103$.

§ 21. Aplicação das séries ao cálculo dos integrais definidos

Mostrámos, nos capítulos X e XI (t. I), que existiam integrais definidos que, considerados como funções dos seus limites superiores, não se exprimiam sob forma finita por meio das funções elementares.

Por vezes, é cómodo calcular tais integrais por meio de séries. Consideremos alguns exemplos.

1. Seja calcular o integral

$$\int_0^a e^{-x^2}\, dx.$$

A primitiva de s^{-x^2} não é uma função elementar. Para calcular o integral, desenvolvamos em série, a função sob o sinal soma substituindo no desenvolvimento de e^x (ver fórmula (2), § 17) x por $-x^2$:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$$

Integrando os dois membros desta igualdade de 0 a a, obtém-se

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx = \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1!\cdot 3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \ldots\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1!\cdot 3} + \frac{a^5}{2!\cdot 5} - \frac{a^7}{3!\cdot 7} + \ldots$$

Esta igualdade permite calcular o integral, qualquer que seja a, com a aproximação desejada.

2. Seja calcular o integral

$$\int_0^a \frac{\text{sen}\, x}{x}\,dx.$$

Desenvolvamos em série a função sob o sinal soma: como

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

tem-se:

$$\frac{\text{sen}\, x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots,$$

convergindo esta última série qualquer que seja x. Integrando termo a termo, obtém-se:

$$\int_0^a \frac{\text{sen}\, x}{x}\,dx = a - \frac{a^3}{3!\cdot 3} + \frac{a^5}{5!\cdot 5} - \frac{a^7}{7!\cdot 7} + \ldots$$

É fácil de calcular a soma desta série com a precisão desejada, qualquer que seja a.

3. Calcular o integral elíptico

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\,\text{sen}^2\,\varphi}\,d\varphi \qquad (k < 1).$$

Desenvolvamos a expressão sob o sinal soma em série de binómio, com $m = \frac{1}{2}$, $x = -k^2\,\text{sen}^2\,\varphi$ (ver fórmula (5), § 19):

$$\sqrt{-k^2\,\text{sen}^2\,\varphi} = 1 - \frac{1}{2}k^2\,\text{sen}^2\,\varphi - \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,k^4\,\text{sen}^4\,\varphi -$$

$$- \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{6}\,k^6\,\text{sen}^6\,\varphi - \ldots$$

Esta série converge qualquer que seja φ e pode ser integrada termo a termo, dado que ela é majorável em todo o intervalo.

Por conseguinte,

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\, d\varphi = \varphi - \frac{1}{2} k^2 \int_0^{\varphi} \operatorname{sen}^2 \varphi\, d\varphi -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{1}{4} k^4 \int_0^{\varphi} \operatorname{sen}^4 \varphi\, d\varphi - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{3}{6} k^6 \int_0^{\varphi} \operatorname{sen}^6 \varphi\, d\varphi - \ldots$$

Os integrais do segundo membro calculam-se elementarmente. Para $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} \varphi\, d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \frac{\pi}{2}$$

(ver § 6, cap. XI, t. I) e, por conseguinte,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \ldots \right].$$

§ 22. Aplicação das séries à integração de equações diferenciais

Se a integração duma equação diferencial não se reduzir a quadraturas, tem-se, então, de recorrer a métodos de integração aproximada. Um destes métodos consiste em representar a solução da equação sob a forma de série de Taylor; a soma de um número finito de termos desta série será aproximadamente igual à solução particular procurada.

Suponhamos, por exemplo, que se tem de procurar a solução duma equação diferencial de segunda ordem

$$y'' = F(x, y, y'), \tag{1}$$

com as condições iniciais

$$(y)_{x=x_0} = y_0, \qquad (y')_{x=x_0} = y'_0. \tag{2}$$

Suponhamos que a solução $y = f(x)$ existe e pode ser representada por uma série de Taylor (não nos aprofundaremos sobre a questão das condições que devam ser verificadas para que tal tenha lugar):

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} f''(x_0) + \ldots \quad (3)$$

Devemos encontrar $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ..., isto é, os valores das derivadas da solução particular para $x = x_0$. Encontra-se-las por meio da equação (1) e das condições (2):

$$f(x_0) = y_0, \qquad f'(x_0) = y'_0;$$

deduz-se da equação (1):

$$f''(x_0) = (y'')_{x=x_0} = F(x_0, y_0, y'_0).$$

Derivando os dois membros da equação (1) em relação a x

$$y''' = F'_x(x, y, y') + F'_y(x, y, y')\, y' + F'_{y'}(x, y, y')\, y'' \quad (4)$$

e substituindo $x = x_0$ no segundo membro, encontra-se:

$$f'''(x_0) = (y''')_{x=x_0}.$$

Derivemos a relação (4) uma vez mais. Tem-se

$$f^{IV}(x_0) = (y^{IV})_{x=x_0},$$

e assim sucessivamente.

Substituamos os valores das derivadas encontradas na igualdade (3). Esta série representa a solução da equação proposta para os valores de x para os quais ela converge.

Exemplo — Encontrar a solução da equação

$$y'' = -yx^2,$$

que satisfaz as condições iniciais

$$(y)_{x=0} = 1, \qquad (y')_{x=0} = 0.$$

Resolução — Tem-se:

$$f(0) = y_0 = 1; \qquad f'(0) = y'_0 = 0.$$

Deduz-se da equação dada $(y'')_{x=0} = f''(0) = 0$; depois

$$y''' = -y'x^2 - 2xy, \qquad (y''')_{x=0} = f'''(0) = 0,$$

$$y^{IV} = -x^2y'' - 4xy' - 2y, \quad (y^{IV})_{x=0} = -2$$

e em geral, derivando k vezes os dois membros da equação pela aplicação da fórmula de Leibniz, vem (§ 22, cap. III, t. I):

$$y^{(k+2)} = -y^{(k)}x^2 - 2ky^{(k-1)}x - k(k-1)\,y^{(k-2)}.$$

Fazendo $x = 0$, obtém-se:

$$y_0^{(k+2)} = -k\,(k-1)\,y_0^{(k-2)}$$

ou, fazendo $k + 2 = n$,

$$y_0^{n} = -(n-3)\,(n-2)\,y_0^{(n-4)}.$$

Donde

$$y_0^{\text{IV}} = -1\cdot2,\quad y_0^{(8)} = -5\cdot6 y_0^{\text{IV}} = (-1)^2\,(1\cdot2)\,(5\cdot6),$$
$$y_0^{12} = -9\cdot10 y_0^{(8)} = (-1)^3\,(1\cdot2)\,(5\cdot6)\,(9\cdot10),$$
$$y_0^{4k} = (-1)^k\,(1\cdot2)\,(5\cdot6)\,(9\cdot10)\,\ldots\,[(4k-3)\,(4k-2)].$$

Além disso,

$$y_0^{(5)} = 0,\quad y_0^{(9)} = 0,\ \ldots,\ y_0^{(4k+1)} = 0,$$
$$y_0^{(6)} = 0,\quad y_0^{(10)} = 0,\ \ldots,\ y_0^{(4k+2)} = 0,$$
$$y_0^{(7)} = 0,\quad y_0^{(11)} = 0,\ \ldots,\ y_0^{(4k+3)} = 0.$$

De modo que sòmente não se anulam as derivadas de ordens múltiplas de quatro.

Substituindo os valores das derivadas encontradas na série de MacLaurin, obtém-se a solução da equação proposta

$$y = 1 - \frac{x^4}{4!}\,1\cdot2 + \frac{x^8}{8!}\,(1\cdot2)\,(5\cdot6) - \frac{x^{12}}{12!}\,(1\cdot2)\,(5\cdot6)\,(9\cdot10) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^k\,\frac{x^{4k}}{(4k)!}\,(1\cdot2)\,(5\cdot6)\,\ldots\,[(4k-3)\,(4k-2)] + \ldots$$

Verifica-se, por meio da regra d'Alembert que esta série converge para todos os valores de x, logo ela é solução da equação difrencial.

Quando a equação é linear, é cómodo procurar os coeficientes do desenvolvimento duma solução particular pelo método dos coeficientes indeterminados. Para isso, «substitui-se» directamente a série

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

na equação diferencial e identificam-se os coeficientes das mesmas potências de x dum e doutro lado da equação.

Exemplo — Achar a solução da equação

$$y'' = 2xy' + 4y,$$

que verifica as condições iniciais

$$(y)_{x=0} = 0,\qquad (y')_{x=0} = 1.$$

Resolução — Façamos

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

Acha-se, tendo-se em conta as condições iniciais

$$a_0 = 0,\quad a_1 = 1.$$

Por conseguinte,

$$y = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$
$$y' = 1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots,$$
$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots$$

Substituindo as expressões acima na equação proposta e identificando os coeficientes das mesmas potências de x, vem:

$$2a_2 = 0, \qquad \text{donde} \quad a_2 = 0;$$
$$3\cdot 2a_3 = 2 + 4, \qquad \text{donde} \quad a_3 = 1;$$
$$4\cdot 3a_4 = 4a_2 + 4a_2, \qquad \text{donde} \quad a_4 = 0;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n(n-1)a_n = (n-2)\,2a_{n-2} + 4a_{n-2}, \qquad \text{donde} \quad a_n = \frac{2a_{n-2}}{n-1}.$$

Por conseguinte,

$$a_5 = \frac{2\cdot 1}{4} = \frac{1}{2!}; \qquad a_7 = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{6} = \frac{1}{3!}; \qquad a_9 = \frac{1}{4!};$$
$$a_{2k+1} = \frac{2\cdot\frac{1}{(k-1)!}}{2k} = \frac{1}{k!};$$
$$a_4 = 0; \quad a_6 = 0; \quad a_{2k} = 0.$$

Substituindo os coeficientes encontrados, emcontra-se a equação procurada

$$y = x + \frac{x^3}{1} + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{k!} + \ldots$$

A série obtida converge qualquer que seja x.

Notemos que a solução particular encontrada se exprime por meio das funções elementares; com efeito, se se puser x em factor, obtém-se o desenvolvimento da função e^{x^2}. Logo,

$$y = xe^{x^2}.$$

§ 23. Equação de Bessel

Assim se chama a uma equação da forma

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)\,y = 0 \qquad (p = \text{const}). \tag{1}$$

Convém procurar a solução desta equação, como as soluções de certas equações de coeficientes variáveis, não sob a forma de série inteira, mas sob a forma de produto duma certa potência de x por uma série inteira:

$$y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k. \tag{2}$$

É lícito tomar a_0 diferente de zero, dado que o expoente r é indeterminado.

Recopiemos a expressão (2) sob a forma

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k}$$

e procuremos as suas derivadas:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k) a_k x^{r+k-1};$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) a_k x^{r+k-2}$$

Substituamos estas expressões na equação (1):

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) a_k x^{r+k-2} +$$

$$+ x \sum_{k=0}^{\infty} (r+k) a_k x^{r+k-1} + (x^2 - p^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k} = 0.$$

Anulando os coeficientes de x na potência r, $r+1$, $r+2$, ..., $r+k$, obtém-se o sistema de equações diferenciais:

$$\left.\begin{array}{l} [r(r-1) + r - p^2] a_0 = 0 \text{ ou } [r^2 - p^2] a_0 = 0, \\ [(r+1)r + (r+1) - p^2] a_1 = 0 \text{ ou } [(r+1)^2 - p^2] a_1 = 0, \\ [(r+2)(r+1) + (r+2) - p^2] a_2 + a_0 = 0 \\ \qquad \text{ou } [(r+2)^2 - p^2] a_2 + a_0 = 0, \\ [(r+k)(r+k-1) + (r+k) - p^2] a_k + a_{k-2} = 0 \\ \qquad \text{ou } [(r+k)^2 - p^2] a_k + a_{k-2} = 0. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad (3)$$

Consideremos a última igualdade:

$$[(r+k)^2 - p^2] a_k + a_{k-2} = 0. \quad (3')$$

Pode-se recopiá-la sob a forma

$$[(r+k-p)(r+k+p)] a_k + a_{k-2} = 0.$$

Por hipótese, $a \neq 0$; por conseguinte,

$$r^2 - p^2 = 0,$$

logo, $r_1 = p$ ou melhor $r_2 = -p$.

Consideremos, em primeiro lugar, a solução correspondente a $r_1 = p > 0$.

Deduz-se, sucessivamente, do sistema de equações (3) todos os coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_0$ sendo a_0 arbitrário. Tomamos, por exemplo, $a_0 = 1$. Então,

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2p+k)}.$$

Dando a k vários valores, encontra-se:

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = 0, \quad a_3 = 0 \text{ et, em geral, } a_{2m+1} = 0; \\ &a_2 = -\frac{1}{2(2p+2)}; \quad a_4 = \frac{1}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)}; \ldots; \\ &a_{2\nu} = (-1)^{\nu+1}\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2\nu(2p+2)(2p+4)\ldots(2p+2\nu)}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Substituindo os coeficientes encontrados na fórmula (2), obtém-se:

$$y_1 = x^p\left[1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \right.$$

$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(2p+2)(2p+4)(2p+6)} + \ldots\right]. \quad (5)$$

Todos os coeficientes $a_{2\nu}$ são determinados porque, por todo o k, o coeficiente de a_k na equação (3)

$$(r_1 + k)^2 - p^2$$

não é nulo.

Assim, y_1 é uma solução particular da equação (1).

Procuremos, agora, em que condições todos os coeficientes a_k são determinados quando se considera a segunda raíz $r_2 = -p$. Para isso, é preciso que seja verificada a desigualdade seguinte para todo k positivo e par:

$$(r_2 + k)^2 - p^2 \neq 0 \quad (6)$$

$$r_2 + k \neq p.$$

Ora, $p = r_1$, por conseguinte,

$$r_2 + k \neq r_1.$$

Assim, a condição (6) é, neste caso, equivalente à seguinte:

$$r_1 - r_2 \neq k,$$

sendo k um inteiro par positivo. Mas

$$r_1 = p, \qquad r_2 = -p,$$

por conseguinte,

$$r_1 - r_2 = 2p.$$

De modo que, se p não é um número inteiro, pode-se escrever uma segunda solução particular que se deduz da expressão (5) substituindo p por $-p$:

$$y_2 = x^{-p}\left[1 - \frac{x^2}{2(-2p+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(-2p+2)(-2p+4)} - \right.$$

$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(-2p+2)(-2p+4)(-2p+6)} + \ldots\right]. \qquad (5')$$

As séries inteiras (5) e (5′) convergem qualquer que seja x, o que é fácil de verificar aplicando a regra d'Alembert. É igualmente evidente que y_1 e y_2 são linearmente independentes (*).

A solução y_1, multiplicada por um certo factor constante, chama-se *função de Bessel de primeira espécie de ordem p* e representa-se-la por J_p. A solução y_2 é representada por J_{-p}.

Por conseguinte, quando p não é um número inteiro, a solução geral da equação (1) escreve-se

$$y = C_1 J_p + C_2 J_{-p}.$$

Assim, se $p = \frac{1}{2}$, a série (5) escreve-se.

$$x^{\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right].$$

(*) Verifica-se, como se segue, a independência linear destas funções Consideremos a relação

$$\frac{y_2}{y_1} = x^{-2p}\,\frac{1 - \frac{x^2}{2(-2p+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(-2p+2)(-2p+4)} - \ldots}{1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \ldots}.$$

Esta relação não é constante, dado que tende para infinito quando $x \to 0$. Logo, as funções y_1 e y_2 são linearmente independentes.

Esta solução multiplicada por $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, chama-se função de Bessel $J_{\frac{1}{2}}$; notemos que a expressão entre parêntesis recto é o desenvolvimento em série do $\operatorname{sen} x$. Por conseguinte,

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen} x$$

Do mesmo modo se obtém, a partir da fórmula (5'):

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

O integral geral da equação (1) quando $p=\frac{1}{2}$ é

$$y=C_1 J_{\frac{1}{2}}(x)+C_2 J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

Suponhamos, agora, que p é um número inteiro positivo que designaremos por n $(n \geqslant 0)$. A solução (5) tem, então, um sentido e representa uma primeira solução particular da equação (1). Mas a solução (5') nada representa, porque certos donominadores do desenvolvimento se anulam.

Para $p=n$ inteiro positivo, toma-se por função de Bessel J_n a série (5) multiplicada pelo factor $\frac{1}{2^n n!}$ (quando $n=0$, toma-se o factor 1):

$$J_n(x)=\frac{x^n}{2^n n!}\left[1-\frac{x^2}{2(2n+2)}+\frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)}-\right.$$

$$\left.-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)}+\ldots\right]$$

ou

$$J_n(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(n+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu} \tag{7}$$

Demonstra-se que é preciso procurar neste caso uma segunda solução particular sob a forma

$$K_n(x)=J_n(x)\operatorname{Log} x+x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Substituindo esta expressão na equação (1) determinam-se os coeficientes b_k.

A função $K_n(x)$ com os coeficientes assim definidos chama-se, após multiplicação por um certo factor constante, *função de Bessel de segunda espécie de ordem n.*

É uma segunda solução da equação (1), que, com a primeira, forma um sistema linearmente independente.

O integral geral escreve-se

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 K_n(x). \tag{8}$$

Notemos que

$$\lim_{x \to 0} K_n(x) = \infty.$$

Por conseguinte, se se quer limitar às soluções finitas para $x = 0$, será preciso fazer $C_2 = 0$ na fórmula (8).

Exemplo — Encontrar a solução da equação de Bessel para $p = 0$

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

que satisfaça às condições iniciais:

$$\text{para } x = 0, \quad y = 2, \quad y' = 0.$$

Resolução — De acordo com a fórmula (7) encontra-se a solução particular

$$J_0(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu\,!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu} = 1 - \frac{1}{(1\,!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{(2\,!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3\,!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots$$

Utilizando esta solução, pode-se escrever a solução que satisfaz às condições iniciais dadas, a saber:

$$y = 2J_0(x).$$

Nota — Se se tivesse de procurar o integral geral da equação proposta procurar-se-ia uma segunda solução particular sob a forma

$$K_0(x) = J_0(x) \operatorname{Log} x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Limitamo-nos a indicar que a segunda solução particular, que designamos por $k_0(x)$, se escreve

$$K_0(x) = J_0(x) \operatorname{Log} x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{(2\,!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(3\,!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots$$

Após multiplicação por um certo factor constante, esta função chama-se *função de Bessel de segunda espécie de ordem zero.*

Exercícios

Escrever os primeiros termos das séries de que se conhece o termo geral:

1. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. 2. $u_n = \frac{n^3}{n+1}$. 3. $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

4. $u_n = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^k}$. 5. $u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$.

Estudar a convergência das seguintes séries:

6. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots$ Resp. Convergente.

7. $\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{20}} + \frac{1}{\sqrt{30}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10n}} + \ldots$ Resp. Divergente.

8. $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots + \frac{n+1}{n} + \ldots$ Resp. Divergente.

9. $\frac{1}{\sqrt[3]{7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n+6}} + \ldots$ Resp. Divergente.

10. $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^9 + \ldots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} + \ldots$ Resp. Convergente

11. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + \ldots + \frac{n}{n^2+1} + \ldots$ Resp. Divergente.

12. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \ldots + \frac{1}{1+n^2} + \ldots$ Resp. Convergente.

Estudar a convergência das séries de termos gerais:

13. $u_n = \frac{1}{n^3}$. Resp. Convergente. 14. $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. Resp. Divergente.

15. $u_n = \frac{2}{5n+1}$. Resp. Divergente. 16. $u_n = \frac{1+n}{3+n^2}$. Resp. Divergente

17. $u_n = \frac{1}{n^2+2n+3}$. Resp. Convergente.

18. $u_{n-1} = \frac{1}{n \operatorname{Log} n}$. Resp. Divergente.

19. Demonstrar a desigualdade $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \operatorname{Log}(n+1) >$
$> \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1}$.

20. O teorema de Leibniz é aplicável à série

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \ldots ?$$

Resp. Não é aplicável, dado que os termos da série não decrescem monòtonamente em valores absolutos. A série diverge.

Quantos termos é preciso tomar nas séries seguintes para ter a soma a menos de $\frac{1}{10^6}$

21. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n} + \ldots$ Resp. $n = 20$.

22. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots$ **Resp.** $n=10^6$.

23. $\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n^2}+\ldots$ **Resp.** $n=10^3$.

24. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}+\ldots$ **Resp.** $n=10$.

Dizer se as séries seguintes convergem absolutamente:

25. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$

Resp. Convergência absoluta.

26. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots$

Resp. Convergência absoluta.

27. $\frac{1}{\text{Log } 2}-\frac{1}{\text{Log } 3}+\frac{1}{\text{Log } 4}-\frac{1}{\text{Log } 5}+\ldots(-1)^n\frac{1}{\text{Log } n}+\ldots$

Resp. Semi-convergente.

28. $-1+\frac{1}{\sqrt[5]{2}}-\frac{1}{\sqrt[5]{3}}+\frac{1}{\sqrt[5]{4}}+\ldots(-1)^n\frac{1}{\sqrt[5]{n}}+\ldots$

Resp. Semi-convergente.

Encontrar a soma da série:

29. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$ **Resp.** $\frac{1}{4}$.

Para que valores de x as séries seguintes convergem?

30. $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots$ **Resp.** $-2<x<2$.

31. $x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}+\ldots$ **Resp.** $-1\leqslant x\leqslant 1$.

32. $3x+3^4x^4+3^9x^9+\ldots+3^{n^2}x^{n^2}+\ldots$ **Resp.** $|x|<\frac{1}{3}$.

33. $1+\frac{100x}{1\cdot3}+\frac{10\,000x^2}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1\,000\,000x^3}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\ldots$ **Resp.** $-\infty<x<\infty$.

34. $\text{sen}\, x+2\,\text{sen}\frac{x}{3}+4\,\text{sen}\frac{x}{9}+\ldots+2^n\,\text{sen}\frac{x}{3^n}+\ldots$ **Resp.** $-\infty<x<\infty$.

35. $\frac{x}{1+\sqrt{1}}+\frac{x^2}{2+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}+\ldots$ **Resp.** $-1\leqslant x<1$.

36. $x+\frac{2^k}{2!}x^2+\frac{3^k}{3!}x^3+\ldots+\frac{n^k}{n!}x^n+\ldots$ **Resp.** $-\infty<x<\infty$.

37. $x+\frac{2!}{2^2}x^2+\frac{3!}{3^3}x^3+\ldots+\frac{n!}{n^n}x^n+\ldots$ **Resp.** $-e<x<e$.

38. $x+\frac{2^2}{4!}x^2+\frac{(1\cdot2\cdot3)^2}{6!}x^3+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n+\ldots$ **Resp.** $-4<x<4$.

39. **Achar a soma da série** $x+2x^2+\ldots+nx^n+\ldots$ $(|x|<1)$.

Indicação — Escrever a série sob a forma

$$\begin{aligned} x+x^2+x^3+x^4+\dots \\ x^2+x^3+x^4+\dots \\ x^3+x^4+\dots \\ x^4+\dots \end{aligned}$$

. . . . Resp. $\frac{x}{(1-x)^2}$.

Dizer se as séries seguintes são majoráveis sobre os segmentos indicados:

40. $1+\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\dots+\frac{x^n}{n^2}+\dots$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$. Resp. Majorável.

41. $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{x^n}{n}+\dots$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$. Resp. Não majorável.

42. $\frac{\operatorname{sen} x}{1^2}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{2^2}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3^2}+\dots+\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}+\dots$ $[0, 2\pi]$. Resp. Majorável.

Desenvolvimento de funções em séries

43. Desenvolver $\frac{1}{10+x}$ em série de potências de x e indicar o intervalo de convergência. Resp. Converge para $-10 < x < 10$.

44. Desenvolver $\cos x$ segundo as potências de $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Resp. $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\dots$

45. Desenvolver e^{-x} segundo as potências de x.

Resp. $1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\dots$

46. Desenvolver e^x segundo as potências de $(x-2)$.

Resp. $e^2+e^2(x-2)+\frac{e^2}{2!}(x-2)^2+\frac{e^2}{3!}(x-2)^3+\dots$

47 Desenvolver x^3-2x^2+5x-7 segundo as potências de $(x-1)$. Resp. $-3+$ $+4(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3$.

168

48. Desenvolver o polinómio $x^{10}+2x^9-3x^7-6x^6+3x^4+6x^3-x-2$ em série de Taylor das potências de $x-1$; verificar que este polinómio admite 1 como raíz tripla. Resp. $f(x)=81(x-1)^3+270(x-1)^4+342(x-1)^5+$ $+330(x-1)^6+186(x-1)^7+63(x-1)^8+12(x-1)^9+(x-1)^{10}$.

49. Desenvolver $\cos(x+a)$ segundo as potências de x. Resp. $\cos a - x \operatorname{sen} a -$ $-\frac{x^2}{2!}\cos a+\frac{x^3}{3!}\operatorname{sen} a+\frac{x^4}{4!}\cos a-\dots$

50. Desenvolver $\operatorname{Log} x$ segundo as potências de $(x-1)$. Resp. $(x-1)-$ $-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\dots$

51. **Desenvolver** e^x **em série de potências de** $(x+2)$.

$$\text{Rép.} \quad e^{-2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\,!}\right]$$

52. **Desenvolver** $\cos^2 x$ **em série das potência de** $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. Rép. $\frac{1}{2}+$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}}{(2n-1)\,!}\quad(|x|<\infty).$$

53. **Desenvolver** $\frac{1}{x^2}$ **em série de potências de** $(x+1)$. **Resp.** $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\times$ $\times(x+1)^n\;(-2<x<0)$. 168

54. **Desenvolver** tg x **em série de potências de** $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ **Resp.** $1+2\times$ $\times\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\ldots$

Escrever os quatro primeiros termos do desenvolvimento em série inteira das seguintes funções:

55. tg x. Rép. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$

56. $e^{\cos x}$. Rép. $e\left(1-\frac{x^2}{2\,!}+\frac{4x^4}{4\,!}-\frac{31x^6}{720}-\ldots\right)$.

57. $e^{\text{arc tg}\,x}$. Rép. $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{7x^4}{24}+\ldots$

58. Log $(1+e^x)$. Rép. Log $2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{7x^4}{384}+\ldots$

59. $e^{\text{sen}\,x}$. Rép. $1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\ldots$

60. $(1+x)^x$. Rép. $1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5}{6}x^4-\ldots$

61. sec x. Rép. $1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\ldots$

62. Log cos x. Rép. $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\ldots$

63. **Desenvolver** sen kx **em série inteira de** x.

$$\text{Rép.} \quad kx-\frac{(kx)^3}{3\,!}+\frac{(kx)^5}{5\,!}-\frac{(kx)^7}{7\,!}+\ldots$$

64. **Desenvolver** $\text{sen}^2\,x$ **segundo as potências de** x **e determinar o intervalo de convergência. Resp.** $\frac{2x^2}{2\,!}-\frac{2^3x^4}{4\,!}+\frac{2^5x^6}{6\,!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)\,!}+\ldots$ **A série converge qualquer que seja** x.

65. **Desenvolver** $\frac{1}{1+x^2}$ **em série inteira Resp.** $1-x^2+x^4-x^6+\ldots$

66. **Desenvolver** arc tg x **em série inteira.**

Indicação — Servir-se da fórmula $\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$.

Resp. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \; (-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

67. Desenvolver $\frac{1}{(1+x)^2}$ em série inteira. Resp. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots$ $(-1 < x < 1)$.

Utilizando as fórmulas do desenvolvimento em série de potências das funções e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{Log}(1+x)$, $(1+x)^m$ e aplicando diversos processos desenvolver em séries de potências as funções e determinar os intervalos de convergência:

68. $\operatorname{senh} x$. Resp. $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \; (-\infty < x < \infty)$.

69. $\cosh x$. Resp. $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \; (-\infty < x < \infty)$.

70. $\cos^2 x$. Resp. $1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} \; (-\infty < x < \infty)$.

71. $(1+x) \operatorname{Log}(1+x)$. Resp. $x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n-1)n} \; (|x| \leqslant 1)$.

72. $(1+x) e^{-x}$. Resp. $1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n!} x^n \; (-\infty < x < \infty)$.

73. $\frac{1}{4-x^4}$. Resp. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4^{n+1}} \; (|x| < \sqrt{2})$.

74. $\frac{e^x - 1}{x}$. Resp. $1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \ldots \; (-\infty < x < \infty)$.

75. $\frac{1}{(1-x)^2}$. Resp. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \; (|x| < 1)$.

76. $e^x \operatorname{sen} x$. Resp. $x + x^2 + \frac{2x^3}{3!} - \frac{4x^5}{5!} + \ldots + \sqrt{2^n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} \frac{x^n}{n!} + \ldots$ $(-\infty < x < \infty)$.

77. $x + \sqrt{1+x^2}$. Resp. $x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n \cdot n!} \times$ $\times \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \; (-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

78. $\int_0^x \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{x} dx$. Resp. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2} \; (|x| \leqslant 1)$.

79. $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx$. Rép. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}\ (-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

80. $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$. Rép. $C + \operatorname{Log}|x| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)\,(2n)\,!}$ $(-\infty < x < 0$ et $0 < x < \infty)$.

81. $\int\limits_0^x \frac{dx}{1-x^9}$. Rép. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{9n-8}}{9n-8}$.

82. Demonstrar as igualdades

$$\operatorname{sen}(a+x) = \operatorname{sen} a \cos x + \cos a \operatorname{sen} x$$
$$\cos(a+x) = \cos a \cos x + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} x$$

desenvolvendo os primeiros membros segundo as potências de x.

Calcular, com a ajuda das séries:

83. $\cos 10°$ a menos de 0,0001. Resp. 0,9848.
84. $\operatorname{sen} 1°$ a menos de 0,0001. Resp. 0,0175.
85. $\operatorname{sen} 18°$ a menos de 0,0001. Resp. 0,3090.
86. $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$ a menos de 0,0001. Resp. 0,7071.
87. $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5}$ a menos de 0,0001. Resp. 0,1973.
88. Log 5 a menos de 0,0001. Resp. 1,609.
89. log 5 a menos de 0,0001. Resp. 0,609.
90. arc sen 1 a menos de 0,0001. Resp. 1,5708.
91. $\sqrt{e}$ a menos de 0,0001. Resp. 1,6487.
92. log e a menos de 0,00001. Resp. 0,43429.
93. cos 1 a menos de 0,00001. Resp. 0,5403.

Utilizando o desenvolvimento em série de Maclaurin da função $f(x) = \sqrt[n]{a^n + x}$, calcular a menos de 0,001:

94. $\sqrt[3]{30}$. Resp. 3,107.
95. $\sqrt{70}$. Resp. 4,121.
96. $\sqrt[3]{500}$. Resp. 7,937.
97. $\sqrt[5]{250}$. Resp. 3,017.
98. $\sqrt{84}$. Resp. 9,165.
99. $\sqrt[3]{2}$ Resp. 1,2598.

Calcular os integrais seguintes, desenvolvendo em série as funções sob os sinais de integração:

100. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ a menos de 10^{-5}. Resp. 0,94608.

101. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$ a menos de 0,0001. Resp. 0,7468.

102. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ a menos de 0,0001. Resp. 0,1571.

103. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{x}}\,dx$ a menos de 0,01. Resp. 0,81.

104. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx$ a menos de 0,001. Resp. 0,487.

105. $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$ a menos de 0,001. Resp. 0,764.

106. $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \operatorname{Log}(1+\sqrt{x})\,dx$ a menos de 0,001. Resp. 0,071.

107. $\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{4}}\,dx$ a menos de 0,0001. Resp. 0,9226.

108. $\int\limits_0^{\frac{1}{5}} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ a menos de 0,0001. Resp. 0,0214.

109. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$ a menos de 0,001. Resp. 0,494. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{x}\,dx$. Resp. $\frac{\pi^2}{12}$.

Indicação — No decorrer da resolução deste exemplo e dois dois seguintes é preciso ter em vista as igualdades:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

que serão estabelecidas no § 2 do cap. XVII.

111. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{Log}(1-x)}{x}\,dx$. Resp. $\frac{\pi^2}{6}$. 112. $\int\limits_0^1 \operatorname{Log}\frac{1+x}{1-x}\frac{dx}{x}$. Resp. $\frac{\pi^2}{4}$.

Integração de equações diferenciais por séries

113. Encontrar a solução da equação $y'' = xy$ que satisfaz às condições iniciais seguintes: $x = 0$, $y = 1$, $y' = 0$.

Indicação — Procurar a solução sob a forma de série.

Resp. $1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\ldots(3k-1)\,3k}+\ldots$

114. Encontrar a solução da equação $y'' + xy' + y = 0$ que verifica as condições iniciais: para $x = 0$, $y = 0$, $y' = 1$. Resp. $x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}-\ldots+$ $\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}$.

115. Encontrar a solução geral da equação

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0.$$

Indicação — Procurar a solução sob a forma

$y=x^p(A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots)$. Resp. $C_1x^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\right]+$ $+C_2x^{-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right]=C_1\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}+C_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$.

116. Encontrar a solução da equação $xy'' + y' + xy = 0$ que satisfaz às condições iniciais: para $x = 0$, $y = 1$, $y' = 0$. Resp. $1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{(1\cdot 2)^2\,2^4}-\frac{x^6}{(1\cdot 2\cdot 3)^2\,2^6}+$ $+\ldots(-1)^k\frac{x^{2k}}{(k!)^2\,2^{2k}}+\ldots$

Nota — As duas últimas equações diferenciais são casos particulares da equação de Bessel

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)\,y=0$$

quando $n=\frac{1}{2}$ e $n = 0$.

117. Encontrar a solução geral da equação $4xy''+2y'+y=0$.

Indicação — Procurar a solução sob a forma de série x^p $(a_0 + a_1x +$ $+ a_2x^2 + \ldots)$. Resp. $C_1\cos\sqrt{x}+C_2\operatorname{sen}\sqrt{x}$.

118. Achar a solução da equação $(1 - x^2)\,y'' - xy' = 0$ que satisfaz às condições iniciais: $y = 0$, $y' = 1$ para $x = 0$. Resp. $x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5}+$ $+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7}+\ldots$

119. Achar a solução da equação $(1 + x^2)\,y'' + 2xy' = 0$ que satisfaça às condições iniciais: $y = 0$, $y' = 1$ para $x = 0$. Resp. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$

120. Encontrar a solução da equação $y'' = xyy'$ que satisfaz às condições iniciais: $y = 1$, $y' = 1$ para $x = 0$. Resp. $1+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\frac{3x^5}{5!}+\ldots$

121. Encontrar a solução da equação $(1-x)y' = 1 + x - y$ que satisfaça às iniciais: $y = 0$ para $x = 0$ e indicar o intervalo de convergência da série obtida. Resp. $x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\ldots (-1\leqslant x\leqslant 1)$.

122. Achar a solução da equação $xy'' + y = 0$ que satisfaça às condições iniciais: $y = 0$, $y' = 1$ para $x = 0$ e indicar o intervalo de convergência. Resp. $x-\frac{x^2}{(1!)^2\,2}+\frac{x^3}{(2!)^3\,3}-\frac{x^4}{(3!)^4\,4}+\ldots (-\infty<x<\infty)$.

123. Achar a solução da equação $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$ que satisfaz às condições iniciais: $y = 1$, $y' = 1$ para $x = 0$. Resp. $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

124. Achar a solução da equação $y''+\frac{1}{x}y'+y=0$ que satisfaz às condições iniciais: $y = 1$, $y' = 0$ para $x = 0$ e indicar o intervalo de convergência da série obtida. Resp. $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\ldots (|x|<\infty)$.

Determinar os três primeiros termos do desenvolvimento em série inteira das soluções das equações diferenciais seguintes de que se indicam as condições iniciais:

125. $y'=x^2+y^2$; para $x=0$, $y=1$. Resp. $1+x+x^2+\frac{4x^3}{3}+\ldots$

126. $y''=e^y+x$; para $x=0$, $y=1$, $y'=0$. Resp. $1+\frac{ex^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots$

127. $y'=\operatorname{sen} y-\operatorname{sen} x$; para $x=0$, $y=0$. Resp. $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\ldots$

Determinar alguns termos do desenvolvimento em série inteira das soluções das equações diferenciais seguintes de que se indicam as condições iniciais indicadas:

128. $y''=yy'-x^2$; para $x=0$, $y=0$, $y'=0$. Resp. $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+\frac{8x^4}{4!}+$ $+\frac{14x^5}{5!}+\ldots$

129. $y'=y^2+x^3$; para $x=0$, $y=\frac{1}{2}$. Resp. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+$ $+\frac{9}{32}x^4+\ldots$

130. $y'=x^2-y^2$; para $x=0$, $y=0$. Resp. $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7\cdot 9}x^7+\frac{2}{7\cdot 11\cdot 27}x^{11}-\ldots$

131. $y'=x^2y^2-1$; para $x=0$, $y=1$. Resp. $1-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots$

132. $y'=e^y+xy$; para $x=0$, $y=0$. Resp. $x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{11x^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$

Capítulo XVII

SÉRIES DE FOURIER

§ 1. Definição. Posição do problema

Chama-se *série trigonométrica* a uma série da forma

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots$$

ou, sob uma forma mais compacta

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx). \tag{1}$$

As constantes a_0, a_n et b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ são os *coeficientes da série trigonométrica.*

Se a série (1) convergir, a sua soma é uma função periódica $f(x)$ de período 2π, dado que $\operatorname{sen} nx$ e $\cos nx$ são funções periódicas de período 2π.

De modo que

$$f(x) = f(x + 2\pi).$$

Ponhamos o seguinte problema.

Dá-se uma função periódica $f(x)$ de período 2π. Pergunta-se *para que condições impostas a $f(x)$ existe uma série trigonométrica convergente para $f(x)$.*

Este problema será objecto do presente capítulo.

Determinação dos coeficientes da série por meio das fórmulas de Fourier.

Suponhamos que a função $f(x)$, periódica e de período 2π, pode ser representada por uma série trigonométrica convergente para $f(x)$ no intervalo $(-\pi, \pi)$, isto é, que seja a soma desta série:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx). \tag{2}$$

Suponhamos que o integral da função do primeiro membro desta igualdade é igual à soma dos integrais dos termos da série (2). Isto terá lugar, por exemplo, se se suposer que a série proposta converge absolutamente, isto é, que converge a série numérica positiva seguinte

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + |a_1| + |b_1| + |a_2| + |b_2| + \ldots + |a_n| + |b_n| + \ldots \tag{3}$$

A série (1) é, então, majorável e pode ser integrada termo a termo de $-\pi$ a π. Aproveitemos para calcular o coeficientes a_0.

Integremos os dois membros da igualdade (2) de $-\pi$ a $+\pi$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nx\,dx\right).$$

Calculemos, separadamente, cada integral do segundo membro:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = \pi a_0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\,dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \frac{a_n \operatorname{sen} nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nx\,dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx = -\,b_n \frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Por conseguinte,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0,$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Para calcular os outros coeficientes da série, calcularemos, prèviamente os integrais auxiliares seguintes.

Se n e k forem inteiros e se $n \neq k$, tem-se

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx = 0;\\&\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} kx \, dx = 0;\\&\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} kx \, dx = 0;\end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

e se $n = k$,

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \pi;\\&\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \cos kx \, dx = 0;\\&\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 kx \, dx = \pi.\end{aligned}\right\} \qquad (II)$$

Calculemos, por exemplo, o primeiro integral do grupo (I). Como

$$\cos nx \cos kx = \frac{1}{2} [\cos (n + k) x + \cos (n - k) x],$$

tem-se

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos (n + k) x \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos (n - k) x \, dx = 0.$$

De igual modo se obtêm as outras fórmulas (I) (*). No que respeita aos integrais (II) calculam-se directamente (ver cap. X, t. I). Pode-se calcular, agora, os coeficientes a_k e b_k da série (2).

(*) Com a ajuda das fórmulas

$$\cos nx \operatorname{sen} kx = \frac{1}{2} [\operatorname{sen} (n + k) x - \operatorname{sen} (n - k) x],$$

$$\operatorname{sen} nx \operatorname{sen} kx = \frac{1}{2} [-\cos (n + k) x + \cos (n - k) x].$$

Para determinar a_k, para $k \neq 0$ dado, multipliquemos os dois membros da igualdade (2) por $\cos kx$:

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \operatorname{sen} nx \cos kx). \qquad (2')$$

A série do segundo membro da igualdade é majorável, dado que os seus termos não são superiores em valores absolutos aos termos da série positiva convergente (3). Pode-se, pois, integrar termo a termo sob qualquer segmento.

Integremos a igualdade (2') de $-\pi$ a π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos kx\, dx\right).$$

A respeito das fórmulas (II) e (I), vê-se que todos os integrais do segundo membro se anulam, excepto o que contém o coeficiente a_k. Por conseguinte,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx = a_k\pi,$$

donde

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx. \qquad (5)$$

Multiplicando os dois membros da igualdade (2) por $\operatorname{sen} kx$ e integrando de novo de $-\pi$ a π, obtém-se:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\, dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 kx\, dx = b_k\pi,$$

donde

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\, dx. \qquad (6)$$

Os coeficientes definidos pelas fórmulas (4), (5) e (6) chamam-se *coeficientes de Fourier* da função $f(x)$ e a série trigonométrica (1) formada com estes coeficientes é a *série de Fourier* da função $f(x)$.

Voltemos, agora, ao problema posto no princípio deste parágrafo: quais as propriedades que deve possuir a função $f(x)$ para que a série de Fourier convirja e que a sua soma seja igual aos valores da função nos pontos considerados?

Vamos enunciar um teorema dando as condições necessárias para que a função $f(x)$ seja representável por uma série de Fourier.

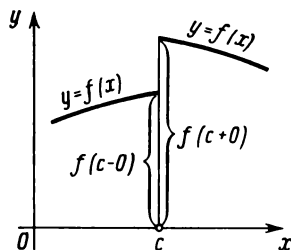



Fig. 356

Definição — Uma função $f(x)$ diz-se *monótona por corte* sobre o segmento $[a, b]$ se se puder decompor esse segmento pelos pontos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, num número finito de intervalos $(a, x_1), (x_1, x_2) \ldots (x_{n-1}, b)$ de modo que a função seja monótona em cada intervalo, isto é, que seja ou não crescente ou não decrescente.

Resulta da definição que se $f(x)$ for monótona por corte e limitada no segmento $[a, b]$, apenas pode ter pontos de descontinuidade de primeira espécie. Com efeito, se $x = c$ é um ponto de descontinuidade para a função $f(x)$, tem-se, em virtude da monotonia da função,

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = f(c-0), \qquad \lim_{x \to c+0} f(x) = f(c+0),$$

isto é, que o ponto c é um ponto de descontinuidade de primeira espécie (fig. 356).

Temos o teorema seguinte:

Teorema — *Se a função periódica $f(x)$ de período 2π é monótona por corte e limitada no segmento $[-\pi, \pi]$, a sua série de Fourier converge em todos os pontos. A soma da série obtida $s(x)$ é igual ao valor da função $f(x)$ nos pontos de continuidade. Nos pontos de descontinuidade de $f(x)$ a soma da série é igual à média aritmética dos limites da função à esquerda e à direita;* isto é, se $x = c$ for um ponto de descontinuidade de $f(x)$,

$$s(x)_{x=c} = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}.$$

Este teorema mostra que a classe das funções representáveis por séries de Fourier é bastante lacta. Eis porque as séries de Fourier

têm encontrado uma larga aplicação nos diferentes ramos da matemática. Utiliza-se particularmente com sucesso as séries de Fourier em física matemática e nas suas aplicações a problemas concretos de mecânica e de física (ver cap. XVIII).

Não demonstraremos o teorema que acaba de ser enunciado. Demonstraremos nos § 8, 9, 10 um outro critério suficiente para que uma função possa ser desenvolvida em série de Fourier. Abrange, num certo sentido, uma classe mais restrita de funções.

§ 2. Exemplos de desenvolvimento de funções em séries de Fourier

Vamos dar exemplos de desenvolvimento de funções em séries de Fourier.

Exemplo — 1. Dá-se uma função periódica $f(x)$ de período 2π definida como se segue:

$$f(x)=x, \quad -\pi < x \leqslant \pi.$$

Esta função é monótona por corte e limitada (fig. 357). Ela admite, pois, um desenvolvimento em série de Fourier.

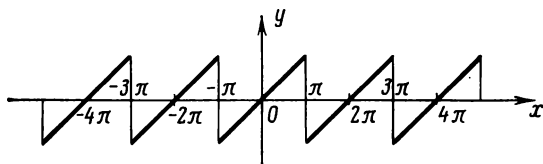



Fig. 357

Aplicando a fórmula (4) do § 1, obtém-se:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Apliquemos a fórmula (5) do § 1 e integremos por partes:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[x\frac{\operatorname{sen} kx}{k}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} kx\,dx\right]=0.$$

De acordo com a fórmula (6) do § 1, determina-se:

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{sen} kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos kx}{k}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx\right]=(-1)^{k+1}\frac{2}{k}.$$

Obtém-se, assim, a série

$$f(x)=2\left[\frac{\operatorname{sen} x}{1}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}-\dots(-1)^{k+1}\frac{\operatorname{sen} kx}{k}+\dots\right].$$

Esta igualdade tem lugar para todos os valores excepto nos pontos de descontinuidade. Nestes pontos a soma da série é igual à média aritmética dos limites da função à esquerda e à direita, isto é, a zero.

Exemplo — 2. Dá-se uma função periódica de período 2π definida como se segue:

$$f(x) = -x \text{ para } -\pi \leqslant x \leqslant 0,$$

$$f(x) = x \text{ para } 0 < x \leqslant \pi$$

isto é, que $f(x) = |x|$ (fig. 358). Esta função é monótona por corte e limitada sobre o segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

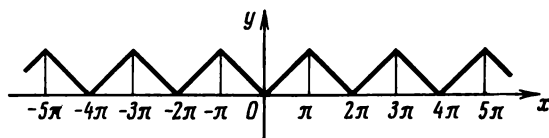



Fig. 358

Determinemos os coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} (-x)\, dx + \int_{0}^{\pi} x\, dx \right] = \pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} (-x) \cos kx\, dx + \int_{0}^{\pi} x \cos kx\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \operatorname{sen} kx}{k} \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen} kx\, dx + \frac{x \operatorname{sen} kx}{k} \Big|_{0}^{\pi} - \frac{1}{k} \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} kx\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi k} \left[-\frac{\cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\cos kx}{k} \Big|_{0}^{\pi} \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2} (\cos k\pi - 1) = \begin{cases} 0 & \text{para } k \text{ par,} \\ -\dfrac{4}{\pi k^2} & \text{para } k \text{ ímpar;} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} (-x) \operatorname{sen} kx\, dx + \int_{0}^{\pi} x \operatorname{sen} kx\, dx \right] = 0.$$

Obtém-se, pois, a série

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots + \frac{\cos (2p+1) x}{(2p+1)^2} + \ldots \right].$$

Esta série converge para todo o valor, e a sua soma é igual à função proposta.

Exemplo — 3. Define-se uma função periódica de período 2π como se segue:

$$f(x) = -1 \text{ para } -\pi < x < 0,$$

$$f(x) = 1 \text{ para } 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Esta função (fig. 359) é monótona por corte e limitada no segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

Calculemos os coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{\pi}^{0} (-1)\,dx + \int_{0}^{\pi} dx \right] = 0;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} (-1) \cos kx\,dx + \int_{0}^{\pi} \cos kx\,dx \right] = -1 \cdot \frac{\operatorname{sen} kx}{k\pi} \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\operatorname{sen} kx}{k\pi} \Big|_{0}^{\pi} = 0;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} (-1) \operatorname{sen} kx\,dx + \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} kx\,dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos kx}{k} \Big|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos kx}{k} \Big|_{0}^{\pi} \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k} [1 - \cos \pi k] = \begin{cases} 0 & \text{para } k \text{ par,} \\ \dfrac{4}{\pi k} & \text{para } k \text{ ímpar.} \end{cases}$$

A série de Fourier considerada escreve-se, pois,

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} (2p+1)x}{2p+1} + \ldots \right].$$

Esta igualdade é exacta para todos os valores excepto nos pontos de descontinuidade.

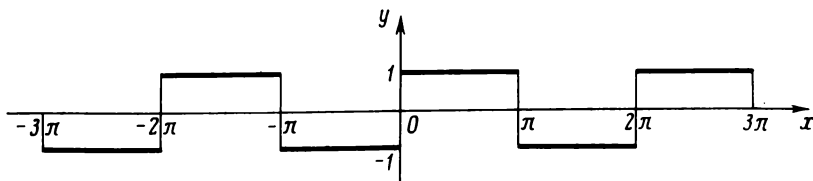



Fig. 359

Indicamos, na figura 360, como as somas parciais s_n representam com uma precisão crescente a função $f(x)$ quando $n \to \infty$.

Exemplo — 4. Dá-se uma função periódica de período 2π definida como se segue:

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi \text{ (fig. 361).}$$

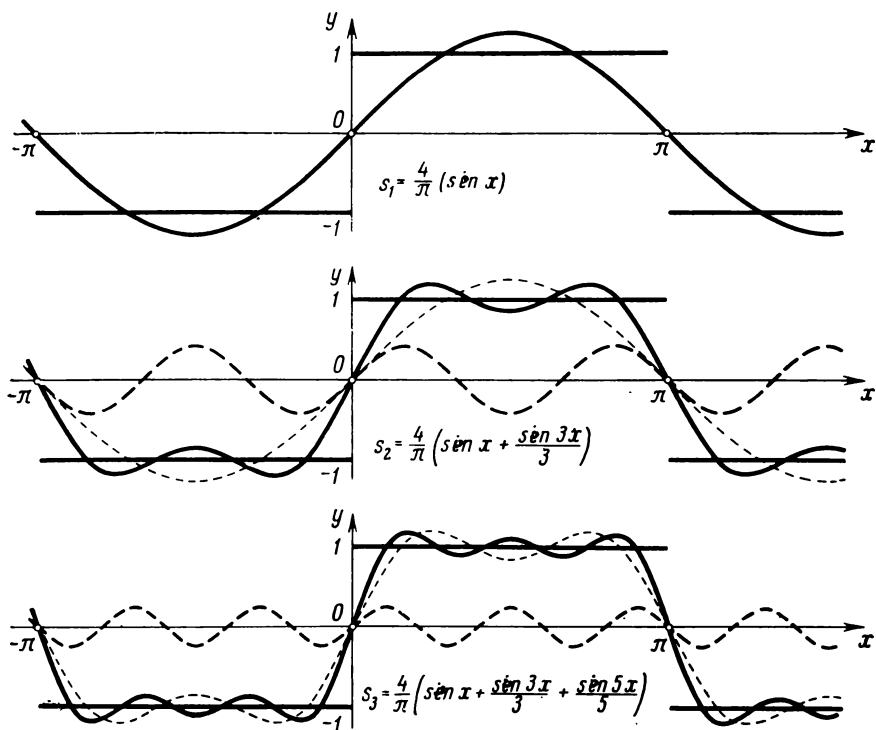



Fig. 360

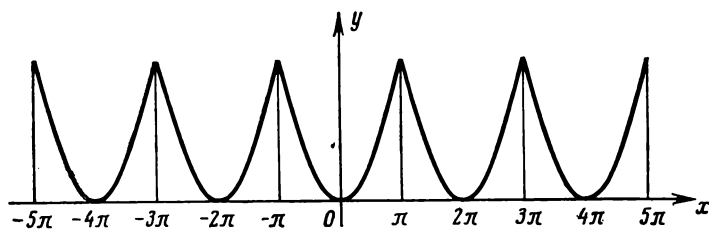



Fig. 361

Calculemos os coeficientes de Fourier:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx=\frac{1}{\pi}\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\,\mathrm{sen}\,kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}\,kx\,dx\right]=$$

$$=-\frac{2}{\pi k}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx\right]=\frac{4}{\pi k^2}\,[\pi\cos k\pi]=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{k^2} & \text{para } k \text{ par,}\\[2mm] -\dfrac{4}{k^2} & \text{para } k \text{ ímpar;}\end{cases}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{sen}\,kx\,dx=+\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi k}\left[\frac{x\,\mathrm{sen}\,kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}\,kx\,dx\right]=0.$$

Logo, a série de Fourier da função dada, escreve-se

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\ldots\right).$$

Como a função é monótona por corte, limitada e contínua, a igualdade tem sempre lugar

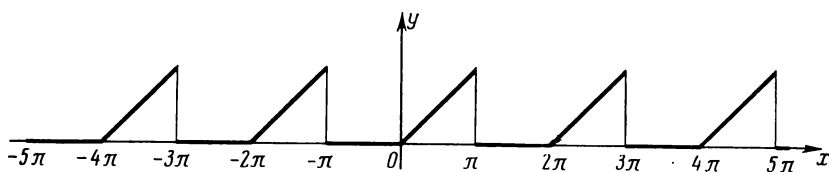



Fig. 362

Fazendo na igualdade obtida $x=\pi$, obtém-se:

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Exemplo — 5. Dá-se uma função periódica de período 2π definida como se segue:

$$f(x)=0 \quad \text{para} \quad -\pi<x\leqslant 0,$$
$$f(x)=x \quad \text{para} \quad 0<x\leqslant\pi \quad \text{(fig. 362).}$$

Definamos os coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{\pi} x\, dx\right] = \frac{1}{\pi}\,\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2};$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos kx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x \operatorname{sen} kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} kx\, dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi k}\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi k^2} & \text{para } k \text{ ímpar,} \\ 0 & \text{para } k \text{ par;} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \operatorname{sen} kx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x \cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \cos kx\, dx\right] =$$

$$= -\frac{\pi}{\pi k} \cos k\pi = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & \text{para } k \text{ ímpar,} \\ -\dfrac{1}{k} & \text{para } k \text{ par;} \end{cases}$$

O desenvolvimento em série de Fourier é

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) +$$
$$+\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \ldots\right).$$

Nos pontos de descontinuidade da função $f(x)$ a soma da série é igual à média aritmética dos limites da função à esquerda e à direita $\left(\text{no caso presente a } \frac{\pi}{2}\right)$.

Fazendo na igualdade obtida $x = 0$, obtém-se:

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

§ 3. Uma nota sobre o desenvolvimento das funções periódicas em série de Fourier

Indiquemos a propriedade seguinte duma função $\psi(x)$ de período 2π; tem-se

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\, dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \psi(x)\, dx,$$

qualquer que seja o número λ.

Com efeito, como

$$\psi(\xi - 2\pi) = \psi(\xi),$$

Fazendo $x = \xi - 2\pi$, pode-se escrever, quaisquer que sejam c e d:

$$\int_c^d \psi(x)\,dx = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(\xi - 2\pi)\,d\xi = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(\xi)\,d\xi = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(x)\,dx$$

Em particular, fazendo $c = -\pi$, $d = \lambda$, obtém-se:

$$\int_{-\pi}^{\lambda} \psi(x)\,dx = \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \psi(x)\,dx,$$

por conseguinte,

$$\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \psi(x)\,dx = \int_{\lambda}^{-\pi} \psi(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx + \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \psi(x)\,dx =$$

$$= \int_{\lambda}^{-\pi} \psi(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\lambda} \psi(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx.$$

A propriedade mencionada significa: *o integral duma função periódica $\psi(x)$ sobre um segmento arbitrário de comprimento igual ao período tem sempre o mesmo valor.* Geomètricamente: as áreas tracejadas sobre a figura 363 são iguais.

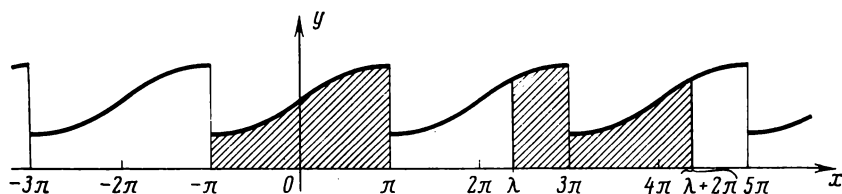



Fig. 363

Resulta da propriedade demonstrada que se pode, no cálculo dos coeficientes de Fourier, substituir o intervalo de integração $(-\pi, \pi)$ pelo intervalo $(\lambda, \lambda + 2\pi)$, isto é, que

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

onde λ é um número arbitrário.

Isto resulta do facto de a função $f(x)$ ser, por hipótese, uma função periódica de período 2π; por conseguinte, as funções $f(x)\cos nx$

e $f(x)$ sen nx são também funções periódicas de período 2π. Mostremos com um exemplo como a propriedade demonstrada simplifica, em certos casos, o cálculo dos coeficientes.

Exemplo — Seja desenvolver em série de Fourier a função $f(x)$ de período 2π igual a x sobre o segmento $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. O gráfico da função $f(x)$ está representado na figura 364. Esta função é dada no segmento $[-\pi, \pi]$ por duas formulas: $f(x) = x + 2\pi$ sobre o segmento $[-\pi, 0]$ e $f(x) = x$ sobre

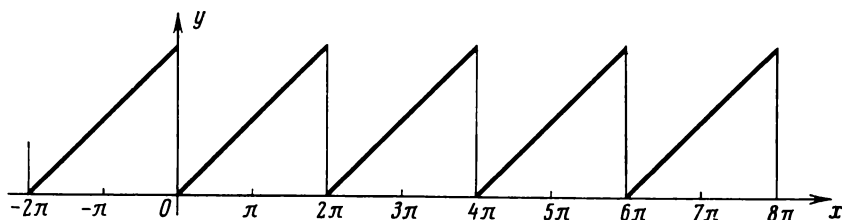



Fig. 364

o segmento $[0, \pi.]$ Ora esta função está representada muito simplesmente por $f(x) = x$ sobre o segmento $[0, 2\pi]$. Por conseguinte, ter-se-á interesse em desenvolver esta função em série de Fourier, utilizando a fórmula (1) com $\lambda = 0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x\, dx = 2\pi ;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \operatorname{sen} nx}{n} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{2\pi} = 0 ;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} \right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{n} .$$

Por conseguinte,

$$f(x) = \pi - 2 \operatorname{sen} x - \frac{2}{2} \operatorname{sen} 2x - \frac{2}{3} \operatorname{sen} 3x - \frac{2}{4} \operatorname{sen} 4x - \frac{2}{5} \operatorname{sen} 5x - \ldots$$

Esta série representa sempre a função dada, excepto nos pontos de descontinuidade (os pontos $x = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$). Nestes pontos, a soma da série é igual à semi-soma dos valores limites da função $f(x)$ à direita e à esquerda (no caso presente a π).

§ 4. Séries de Fourier de funções pares e ímpares

Resulta da definição das funções pares e ímpares que se $\psi(x)$ é *par* se tem

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} \psi(x)\,dx.$$

Com efeito,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} \psi(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} \psi(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} \psi(-x)\,dx +$$

$$+\int_{0}^{\pi} \psi(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} \psi(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} \psi(x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} \psi(x)\,dx,$$

dado que uma função par goza, por definição, desta propriedade: $\psi(-x) = \psi(x)$.

Tem-se, duma maneira análoga, para uma função ímpar $\varphi(x)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} \varphi(-x)\,dx + \int_{0}^{\pi} \varphi(x)\,dx =$$

$$= -\int_{0}^{\pi} \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} \varphi(x)\,dx = 0.$$

Se se tiver o desenvolvimento de Fourier duma função $f(x)$ *ímpar*, o produto $f(x)\cos kx$ é uma função ímpar e $f(x)\,\text{sen}\,kx$ uma função par; logo,

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0,\\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = 0,\\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,kx\,dx, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

isto é, que a série de Fourier duma função *ímpar* apenas contém senos (ver exemplo 1, § 2).

Se se tiver o desenvolvimento de Fourier duma função *par* o produto $f(x) \operatorname{sen} kx$ é uma função ímpar e $f(x) \cos kx$ é par, pelo que:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \\ a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

isto é, a série de Fourier duma função *par* apenas contém cossenos (ver exemplo 2, § 2).

As fórmulas obtidas permitem simplificar os cálculos dos coeficientes de Fourier quando a função dada é par ou ímpar. É evidente que qualquer função periódica não é forçosamente par ou ímpar (ver exemplo 5, § 2).

Exemplo — Seja desenvolver em série de Fourier a função par $f(x)$ de período 2π definida no segmento $[0, \pi]$ por

$$y = x.$$

Já desenvolvemos esta função em série de Fourier no exemplo 2, § 2 (ver fig. 358). Calculamos de novo os coeficientes de Fourier desta função utilizando a paridade desta função.

Em virtude da fórmula (2), $b_k = 0$, qualquer que seja k;

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\operatorname{sen} kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k - 1] = \begin{cases} 0 & \text{para } k \text{ par}, \\ -\dfrac{4}{\pi k^2} & \text{para } k \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Voltamos a encontrar os mesmos coeficientes que no exemplo 2, § 2, mas mais ràpidamente.

§ 5. Séries de Fourier das funções de período $2l$

Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2l$, em regra diferente de 2π. Desenvolvamo-la em série de Fourier.

Façamos a mudança de variável

$$x = \frac{l}{\pi} t.$$

A função $f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ é, então, uma função periódica de t de período 2π, e pode-se desenvolvê-la em série de Fourier no segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$:

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt), \tag{1}$$

ou

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt, \qquad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos kt\,dt,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\operatorname{sen} kt\,dt.$$

Voltemos, agora, à antiga variável x:

$$x=\frac{l}{\pi}t, \qquad t=x\frac{\pi}{l}, \qquad dt=\frac{\pi}{l}dx.$$

Ter-se-á, então:

$$\left.\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \qquad a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos k\frac{\pi}{l}x\,dx,\\ b_k&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen} k\frac{\pi}{l}x\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

A fórmula (1) transforma-se em:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k \operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x\right), \tag{3}$$

onde os coeficientes a_0, a_k, b_k são calculados segundo as fórmulas (2). Tal é a série de Fourier duma função periódica de período $2l$.

Notemos que tudo o que foi dito sobre as séries de Fourier das funções periódicas de período 2π mantém-se em vigor para as funções periódicas de período qualquer $2l$. O teorema sobre o desenvolvimento duma função em série de Fourier do § 1, permanece em vigor, bem como as notas sobre a possibilidade de calcular os coeficientes da série integrando num segmento arbitrário de comprimento igual ao período (ver § 3) e de simplificar o cálculo dos coeficientes quando a função é par ou ímpar (§ 4).

Exemplo — Desenvolver em série de Fourier a função periódica de período $2l$ definida no segmento $[-l;\ l]$ pela igualdade $f(x) = |x|$ (fig. 365).

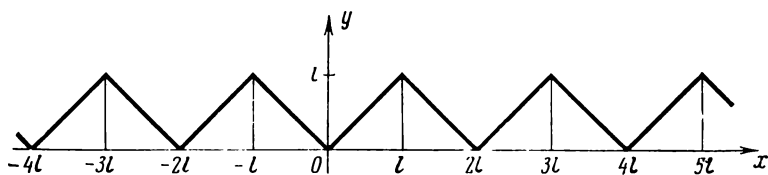



Fig. 365

Resolução — Como a função considerada é par, tem-se

$$b_k = 0\ ; \quad a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x\,dx = l\ ;$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2l}{\pi^2}\int_0^\pi x\cos kx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{para } k \text{ par,} \\ -\frac{4l}{\pi^2 k^2} & \text{para } k \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Por conseguinte, o desenvolvimento escreve-se:

$$|x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{l}x}{1} + \frac{\cos\frac{3\pi}{l}x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos\frac{(2p+1)\pi}{l}x}{(2p+1)^2} + \ldots\right].$$

§ 6. Desenvolvimento em série de Fourier duma função não periódica

Seja dada no segmento $[a, b]$ uma função monótona por corte $f(x)$ (fig. 366). Mostremos que esta função pode ser representada nos pontos de descontinuidade por uma série de Fourier. Consideremos, para esse

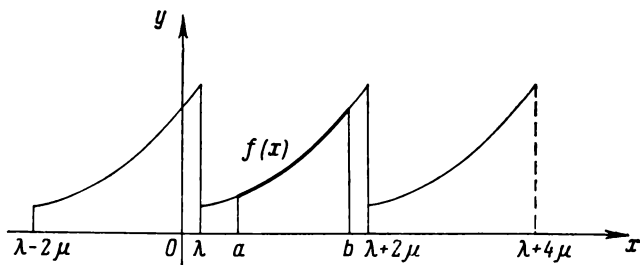



Fig. 366

efeito, uma função arbitrária periódica monótona por corte $f_1(x)$ de período $2\mu \geqslant |b-a|$ e coincindindo com a função $f(x)$ no segmento $[a, b]$. (Prolongamos $f(x)$).

Desenvolvamos a função $f_1(x)$ em série de Fourier. A soma desta série concide em todo o segmento $[a, b]$ (excepto nos pontos de descontinuidade) com a função dada $f(x)$, isto é, que se desenvolveu $f(x)$ em série de Fourier no segmento $[a, b]$.

Consideremos em seguida o seguinte caso importante. Seja $f(x)$ uma função dada no intervalo $[0, l]$. Prolongando arbitràriamente esta

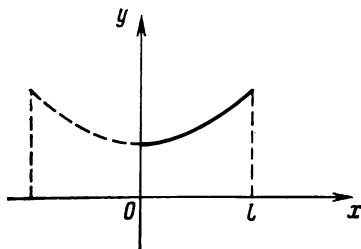



Fig. 367

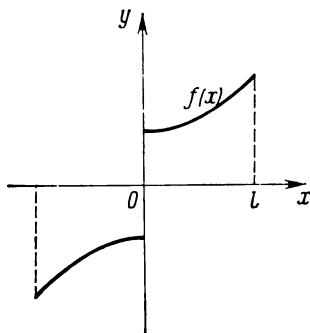



Fig. 368

função no intervalo $[-l, 0]$ (conservando a monotonia por corte) podemos desenvolver esta função em série de Fourier.

Em especial, se prolongarmos esta função no intervalo $-l \leqslant x < 0$ de modo que $f(x) = f(-x)$, obtém-se, finalmente, uma função par (fig. 367). (Diz-se, então, que a função $f(x)$ foi «prolongada de maneira par». Esta série desenvolve-se em série de Fourier de cossenos. De modo que a função $f(x)$ dada no intervalo $[0, l]$ foi desenvolvida em série de Fourier de cossenos.

Se se prolonga a função $f(x)$ sobre $-l \leqslant x < 0$ de modo que $f(x) = -f(-x)$ obtém-se uma função ímpar, desenvolvendo-se em série de senos (fig. 368). (Prolongamento ímpar da função $f(x)$. Por conseguinte, se for dado no intervalo $[0, l]$ uma função monótona por corte $f(x)$, pode-se desenvolvê-la ou em série de Fourier de cossenos ou em série de Fourier de senos.

Exemplo — 1. Seja desenvolver a função $f(x) = x$ no intervalo $[0, \pi]$ em série de senos.

Resolução — Prolonguemos esta função de maneira ímpar (fig. 357). Obtém-se a série

$$x = 2\left[\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \dots\right]$$

(ver exemplo 1, § 2).

Exemplo — 2. Desenvolver a função $f(x) = x$ no segmento $[0, \pi]$ em série de cosenos.

Resolução — Prolonguemos esta função de maneira par; tem-se:

$$f(x) = |x|, \quad -\pi < x \leqslant \pi$$

(fig. 358). O desenvolvimento em série de Fourier desta última função é

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right]$$

(ver exemplo 2, § 2). Por conseguinte, no intervalo $[0, \pi]$, tem-se a igualdade

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right]$$

§ 7. Aproximação, em média, duma função dada por meio de polinómios trigonométricos

A representação duma função em série (de Fourier, Taylor, etc.) tem este sentido prático que a *soma parcial* obtida quando se limita ao termo de ordem n é uma *expressão* aproximada da função que se desenvolve. Pode-se levar esta aproximação ao grau desejado escolhendo convenientemente n. Todavia, o carácter da representação aproximada pode variar.

Assim a soma s_n dos n primeiros termos da série de Taylor coincide com a função dada no ponto considerado e não tem neste ponto derivadas até à ordem n coincidindo com as derivadas da função considerada. Um polinómio de Lagrange de ordem n (ver § 9, cap. VII, t. I) coincide com a função considerada em $n + 1$ pontos.

Vejamos qual é o carácter da aproximação duma função periódica $f(x)$ por meio dos polinómios trigonométricos da forma

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx,$$

em que $a_0, a_1, b_1, b_2, \dots, a_n, b_n$ são coeficientes de Fourier, isto é que se aproxima com a soma dos n primeiros termos da série de Fourier desta função. Façamos algumas notas preliminares.

Suponhamos que se tem $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$ e que se quer avaliar o erro cometido quando se substitui esta função por uma outra função $\varphi(x)$. Pode-se considerar, por exemplo, que o erro é representado pela expressão $\max|f(x) - \varphi(x)|$ no intervalo $[a, b]$, o que se chama *desvio máximo* entre $f(x)$ e $\varphi(x)$. Mas, por vezes,

é mais natural considerar o *desvio quadrático médio* δ cujo quadrado é, por definição,

$$\delta^2 = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 \, dx.$$

Expliquemos, na figura 369, a diferença entre o desvio quadrático médio e o desvio máximo.

Suponhamos a função $f(x)$ representada pelo traço a cheio e as aproximações $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ pelos ponteados. O desvio máximo da

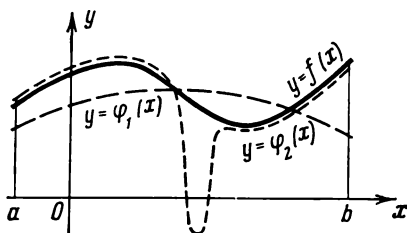



Fig. 369

curva $y = \varphi_1(x)$ é menor que o desvio máximo da curva $y = \varphi_2(x)$, mas o desvio quadrático médio da primeira curva é maior que o da segunda, porque a função $y = \varphi_2(x)$ se distingue notòriamente de $y = f(x)$ sòmente num pequeno intervalo e, por conseguinte, caracteriza melhor a função $y = f(x)$ que a primeira.

Voltemos agora ao nosso problema.

Seja dada uma função $f(x)$ periódica de período 2π. Entre os polinómios trigonométricos do grau n

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx)$$

pede-se para calcular, escolhendo convenientemente os coeficientes α_k e β_k, o polinómio cujo desvio quadrático médio, definido pela igualdade

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx) \right]^2 dx$$

é mínimo.

O problema reside em encontrar o mínimo duma função de $2n+1$ variáveis $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Desenvolvamos o quadrado da expressão entre parêntesis recto e integremos termo a termo; tem-se:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f^2(x) - 2f(x)\left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\pi}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx)\right]^2\right\} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx -$$

$$- \frac{\alpha_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx -$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\beta_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx + \frac{1}{2\pi}\frac{\alpha_0^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi} dx +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2 \int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2 kx\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\alpha_0\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx + \frac{1}{2\pi}\alpha_0\sum_{k=1}^{n}\beta_k \int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} kx\,dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\alpha_j \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \cos jx\,dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\beta_j \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \operatorname{sen} jx\,dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_k\beta_j \int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} kx \operatorname{sen} jx\,dx.$$

Notemos que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0\,; \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k\,;$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,kx\,dx = b_k$$

são os coeficientes de Fourier da função $f(x)$.

Além disso, em virtude das fórmulas (I) e (II) do § 1, tem-se, quando $k = j$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,dx = \pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2\,kx\,dx = \pi,$$

para k e j quaisquer: $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\,kx \cos jx\,dx = 0$,

e, quando, $k \neq j$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos jx\,dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\,kx\,\text{sen}\,jx\,dx = 0.$$

De modo que

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{\alpha_0 a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k) +$$

$$+ \frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2).$$

Juntando e subtraindo a quantidade

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2),$$

tem-se

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) +$$

$$+ \frac{1}{4}(\alpha_0 - a_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2]. \tag{1}$$

Os três primeiros termos desta soma não dependem da escolha dos coeficientes α_0, α_1, ..., α_n, β_1, ..., β_n. Os outros termos

$$\frac{1}{4}(\alpha_0 - a_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2]$$

são não negativos. A sua soma é mínima (zero) quando

$$\alpha_0 = a_0,\ \alpha_1 = a_1,\ \ldots,\ \alpha_n = a_n,\ \beta_1 = b_1,\ \ldots,\ \beta_n = b_n.$$

Tal é a escolha dos coeficientes α_0, α_1, ..., α_n, β_1, ..., β_n para o qual o polinómio trigonométrico

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx)$$

menos se desvia da função $f(x)$ no sentido de que o desvio quadrático médio δ_n^2 seja mínimo.

Acabamos de demonstrar o teorema:

Entre todos os polinómios trigonométricos de ordem n, é o polinómio de Fourier da função $f(x)$ que dá a melhor aproximação quadrática média desta função.

O desvio quadrático médio mínimo é

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2). \tag{2}$$

Como $\delta_n^2 \geqslant 0$, tem-se, qualquer que seja n,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \geqslant \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2).$$

Segue-se que a série do segundo membro converge quando $n \to \infty$ e pode-se escrever

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \geqslant \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2). \tag{3}$$

Esta relação é a *desigualdade de Bessel*.

Limitemo-nos simplesmente a indicar que para qualquer função limitada monótona por corte, o desvio quadrático médio obtido quando se substitui esta função por uma soma parcial de Fourier tende para

zero quando $n \to \infty$: $\delta_n^2 \to 0$ quando $n \to \infty$. Mas, então, da fórmula (2) resulta a igualdade

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx, \qquad (3')$$

chamada *igualdade de Liapounov* (*). (Indiquemos que A. Liapounov demonstrou esta igualdade para uma classe de funções mais lacta que a classe aqui tratada).

Resulta do que acaba de ser demonstrado que, para uma função que satisfaça à igualdade de Liapounov (especialmente para qualquer função limitada monótona por corte), a série de Fourier correspondente dá um desvio quadrático médio nulo.

Nota — Estabeleçamos uma propriedade dos coeficientes de Fourier, que nos servirá no seguimento. Vamos dar, prèviamente, uma definição.

Uma função diz-se *contínua* por corte no intervalo $[a, b]$, se os seus pontos de descontinuidade de primeira espécie são em número finito sobre este segmento (ou se é para todo o valor contínua).

Mostremos a seguinte proposição.

Se a função $f(x)$ for contínua por corte sobre o segmento $[-\pi, \pi]$ os seus coeficientes de Fourier tendem para zero quando $n \to \infty$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \qquad (4)$$

Demonstração — Se a função $f(x)$ é contínua por corte no intervalo $[-\pi, \pi]$, o mesmo se passa com $f^2(x)$. Mas, então, $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx$ existe e é um número finito (**). Então, da desigualdade de Bessel (3) resulta que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ converge, o que implica que o seu termo geral tende para zero: $\lim_{n\to\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0$, as igualdades (4) estão demonstradas. Assim se tem para uma função limitada contínua por corte as igualdades

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx = 0.$$

(*) Esta igualdade é ainda chamada *fórmula de Parseval.*

(**) Este integral é a soma dos integrais dos diferentes bocados de funções contínuas que constituem a função $f(x)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Se a função $f(x)$ é periódica e de período 2π, pode-se recopiar estas últimas igualdades como se segue (com a arbitrário);

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0; \quad \lim_{n\to\infty}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\text{sèn}\,nx\,dx = 0.$$

Notemos que estas igualdades subsistem se se integrar num intervalo $[a, b]$ qualquer, isto é, que os integrais

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)\,\text{sèn}\,nx\,dx$$

tendem para zero quando n tende para infinito, se $f(x)$ for uma função limitada contínua por corte.

Com efeito, suponhamos, para fixar ideias, que $b-a<2\pi$ e consideremos a função auxiliar $\varphi(x)$ de período 2π definida como se segue:

$$\varphi(x) = f(x) \quad \text{para} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$
$$\varphi(x) = 0 \quad \text{para} \quad b < x \leqslant a + 2\pi.$$

Então,

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,dx = \int_a^{a+2\pi} \varphi(x)\cos nx\,dx,$$
$$\int_a^b f(x)\,\text{sèn}\,nx\,dx = \int_a^{a+2\pi} \varphi(x)\,\text{sèn}\,nx\,dx.$$

Como $\varphi(x)$ é uma função limitada e contínua por corte, os integrais dos segundos membros tendem para zero quando $n\to\infty$.

Segue-se que os integrais dos primeiros membros tendem também para zero. A proposição está assim demonstra e tem-se

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,dx = 0; \quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,\text{sèn}\,nx\,dx = 0 \tag{5}$$

quaisquer que sejam a e b e a função $f(x)$ limitada e contínua por corte no segmento $[a, b]$.

§ 8. Integral de Dirichlet

Vamos estabelecer neste parágrafo uma fórmula que exprime as somas parciais duma série de Fourier por meio de integral. Esta fórmula ser-nos-á útil nos parágrafos seguintes.

Consideremos uma soma parcial de Fourier para a função periódica $f(x)$ de período 2π:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_k\cos kx + b_k\,\text{sèn}\,kx),$$

com

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt\, dt.$$

Substituamos estas expressões na de $s_n(x)$, obtém-se:

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\cos kx}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt + \frac{\operatorname{sen} kx}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt\, dt \right]$$

ou, introduzindo $\cos kx$ e $\operatorname{sen} kx$ sob o sinal soma (o que é legítimo, porque $\cos kx$ e $\operatorname{sen} kx$ não contêm a variável de integração),

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kx \cos kt\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} kt\, dt \right].$$

Ponhamos agora $\frac{1}{\pi}$ como factor e substituamos a soma dos integrais pelo integral da soma; tem-se:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{f(t)}{2} + \sum_{k=1}^{n} [f(t) \cos kx \cos kt + f(t) \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} kt] \right\} dt,$$

ou

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kt \cos kx + \operatorname{sen} kt \operatorname{sen} kx) \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t - x) \right] dt. \qquad (1)$$

Transformemos a expressão entre parêntesis. Façamos

$$\sigma_n(z) = \frac{1}{2} + \cos z + \cos 2z + \ldots + \cos nz;$$

então,

$$2\sigma_n(z)\cos z = \cos z + 2\cos z\cos z + 2\cos z\cos 2z + \ldots$$
$$\ldots + 2\cos z\cos nz = \cos z + (1+\cos 2z) + (\cos z + \cos 3z) +$$
$$+ (\cos 2z + \cos 4z) + \ldots + [\cos(n-1)z + \cos(n+1)z] =$$
$$= 1 + 2\cos z + 2\cos 2z + \ldots$$
$$\ldots + 2\cos(n-1)z + \cos nz + \cos(n+1)z$$

ou

$$2\sigma_n(z)\cos z = 2\sigma_n(z) - \cos nz + \cos(n+1)z,$$
$$\sigma_n(z) = \frac{\cos nz - \cos(n+1)z}{2(1-\cos z)}.$$

Ora,

$$\cos nz - \cos(n+1)z = 2\,\text{sen}\,(2n+1)\frac{z}{2}\,\text{sen}\,\frac{z}{2},$$
$$1 - \cos z = 2\,\text{sen}^2\frac{z}{2}.$$

Logo,

$$\sigma_n(z) = \frac{\text{sen}\,(2n+1)\frac{z}{2}}{2\,\text{sen}\,\frac{z}{2}}.$$

Pode-se, pois, recopiar a igualdade (1) sob a forma

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\text{sen}\,(2n+1)\frac{t-x}{2}}{2\,\text{sen}\,\frac{t-x}{2}}\,dt.$$

Como a função sob o sinal soma é periódica (de período 2π) o integral conserva o mesmo valor em qualquer segmento de comprimento 2π. Segue-se que

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\,\frac{\text{sen}\,(2n+1)\frac{t-x}{2}}{2\,\text{sen}\,\frac{t-x}{2}}\,dt.$$

Introduzamos a nova variável de integração α fazendo

$$t - x = \alpha, \quad t = x + \alpha.$$

Então, obtém-se a fórmula

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} d\alpha. \tag{2}$$

O integral do segundo membro é o *integral de Dirichlet.*

Façamos nesta fórmula $f(x) = 1$; então, $a_0 = 2$, $a_k = 0$, $b_k = 0$ quando $k > 0$; logo, $s_n(x) = 1$ qualquer que seja n, e obtém-se a identidade

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} d\alpha, \tag{3}$$

que nos servirá no seguimento.

§ 9. Convergência duma série de Fourier num dado ponto

Suponhamos que a função $f(x)$ é contínua por corte no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Multipliquemos os dois membros da identidade (3) do parágrafo anterior por $f(x)$ e introduzamos $f(x)$ sob o sinal de integração. Obtém-se a igualdade

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} d\alpha.$$

Subtraiamos, membro a membro, esta igualdade da igualdade (2) do parágrafo anterior. Obtém-se:

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} d\alpha.$$

Vê-se que a convergência da série de Fourier para o valor da função $f(x)$ no ponto dado depende da convergência para zero do integral do segundo membro quando $n \to \infty$.

Decomponhamos este último integral em dois:

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha) - f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sen} n\alpha\, d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha) - f(x)]\cos n\alpha\, d\alpha,$$

utilizando a fórmula $\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen} n\alpha \cos\frac{\alpha}{2} + \cos n\alpha \times \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$.

Decompondo o primeiro integral do segundo membro desta última igualdade em três, vem:

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+\alpha) - f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sen} n\alpha\, d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}[f(x+\alpha) - f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sen} n\alpha\, d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}[f(x+\alpha) - f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{sen} n\alpha\, d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha) - f(x)]\frac{1}{2}\cos n\alpha\, d\alpha.$$

Façamos $\Phi_1(\alpha) = \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{2}$. Como $f(x)$ é limitada e contínua por corte, $\Phi_1(\alpha)$ será igualmente uma função periódica de α limitada e contínua por corte. Segue-se que o último integral do

segundo membro tende para zero quando $n \to \infty$, porque é o coeficiente de Fourier desta função. A função

$$\Phi_2(\alpha) = [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

é limitada quando $-\pi \leqslant \alpha < -\delta$ e $\delta \leqslant \alpha \leqslant \pi$; tem-se

$$|\Phi_2(\alpha)| \leqslant [M + M] \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{\delta}{2}},$$

em que M é o limite superior de $|f(x)|$. Além disso, a função $\Phi_2(\alpha)$ também é contínua por corte. Por conseguinte, em virtude das fórmulas (5) do § 7, o segundo e terceiro integrais tendem para zero quando $n \to \infty$.

Pode-se escrever, por conseguinte,

$$\lim_{n \to \infty} [s_n(x) - f(x)] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} [f(x+\alpha) - f(x)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \operatorname{sen} n\alpha \, d\alpha. \qquad (1)$$

A integração na expressão do segundo membro é alargada ao intervalo $-\delta \leqslant \alpha \leqslant \delta$, logo o integral depende dos valores de $f(x)$ sòmente no intervalo compreendido entre $x - \delta$ e $x + \delta$.

Desta última igualdade deduz-se a importante proposição: *a convergência da série de Fourier no ponto considerado x depende sòmente do comportamento da função numa vizinhança arbitràriamente pequena deste ponto.*

Tal é o conteúdo *do princípio da localização no estudo das séries* de Fourier. Se duas funções $f_1(x)$ *e* $f_2(x)$ *concidem na vizinhança dum ponto x, as suas séries de Fourier convergem ou divergem ao mesmo tempo neste ponto.*

§ 10. Algumas condições suficientes para a convergência duma série de Fourier

Demonstramos no parágrafo anterior que se uma função for contínua por corte no intervalo $[-\pi, \pi]$, a convergência da sua série de Fourier no ponto considerado x_0 para o valor $f(x_0)$ depende sòmente do comportamento da função numa vizinhança arbitràriamente pequena $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ de centro no ponto x_0.

Demonstremos em seguida que se a função é, na vizinhança de x_0, tal que os limites seguintes existam e sejam finitos

$$\lim_{\alpha \to -0} \frac{f(x_0 + \alpha) - f(x_0)}{\alpha} = k_1, \tag{1}$$

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{f(x_0 + \alpha) - f(x_0)}{\alpha} = k_2, \tag{2}$$

e se a própria função é contínua no ponto x_0 (fig. 370), a série de Fourier converge neste ponto para $f(x_0)$ (*).

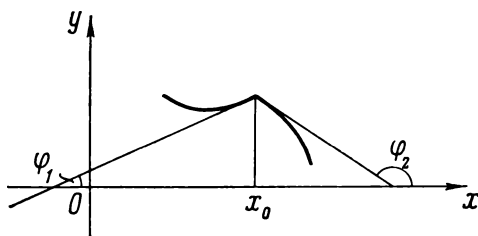



Fig. 370

Demonstração — Consideremos a função $\Phi_2(\alpha)$ do parágrafo anterior:

$$\Phi_2(\alpha) = [f(x_0 + \alpha) - f(x_0)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}};$$

como a função $f(x)$ é contínua por corte no intervalo $[-\pi, \pi]$ e contínua no ponto x_0, é, por conseguinte, contínua numa certa vizinhança $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ do ponto x_0. Logo a função $\Phi_2(\alpha)$ é contínua em todos os pontos em que $\alpha \neq 0$ e $|\alpha| \leqslant \delta$. A função $\Phi_2(\alpha)$ não é definida para $\alpha = 0$.

(*) Se as condições (1) e (2) forem verificadas, diz-se que $f(x)$ no ponto x tem uma derivada à direita e uma derivada à esquerda. Representou-se na fig. 370 uma função tal que $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$, $k_1 \neq k_2$. Se $k_1 = k_2$, isto é, se as derivadas à direita e à esquerda forem iguais, a função é derivável no ponto dado.

Procuremos os limites $\lim\limits_{\alpha\to 0-0} \Phi_2(\alpha)$ e $\lim\limits_{\alpha\to 0+0} \Phi_2(\alpha)$ utilizando as condições (1) e (2):

$$\lim_{\alpha\to 0-0} \Phi_2(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0-0} [f(x_0+\alpha) - f(x_0)] \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0-0} \frac{f(x_0+\alpha) - f(x_0)}{\alpha} \frac{\frac{\alpha}{2}}{\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}} \cos\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0-0} \frac{f(x_0+\alpha) - f(x_0)}{\alpha} \times$$

$$\times \lim_{\alpha\to 0-0} \frac{\frac{\alpha}{2}}{\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}} \lim_{\alpha\to 0-0} \cos\frac{\alpha}{2} = k_1\cdot 1\cdot 1 = k_1.$$

Por conseguinte, se se definir a função $\Phi_2(\alpha)$ fazendo $\Phi_2(0) = k_1$, ela será contínua no intervalo $[-\delta, 0]$ e, por conseguinte, limitada. Demonstra-se, duma maneira análoga, que

$$\lim_{\alpha\to 0+0} \Phi_2(\alpha) = k_2.$$

Logo a função $\Phi_2(\alpha)$ é limitada e contínua no intervalo $[0, \delta]$. Assim, a função $\Phi_2(\alpha)$ é limitada e contínua por corte no intervalo $[-\delta, \delta]$. Voltemos à igualdade (1) do § 9 (designando x por x_0):

$$\lim_{n\to\infty} [s_n(x_0) - f(x_0)] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} [f(x_0+\alpha) - f(x_0)] \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}} \text{sen}\, n\alpha\, d\alpha$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} [s(x_0) - f(x_0)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_2(\alpha)\,\text{sen}\, n\alpha\, d\alpha.$$

Tendo em atenção as fórmulas (5) do § 7, conclui-se que o limite do segundo membro é nulo, e portanto,

$$\lim_{n\to\infty} [s_n(x_0) - f(x_0)] = 0$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = \ (x_0).$$

O teorema está demonstrado.

A diferença entre o teorema demonstrado no § 1 e o teorema acima consiste no que se segue; pedia-se no teorema do § 1 para a convergência da série de Fourier no ponto x_0 para o valor $f(x_0)$, quc x_0 fosse um ponto de continuidade sobre o segmento $[-\pi, \pi]$ e que a função fosse monótona por corte, enquanto que aqui se pede que a função seja contínua no ponto x_0 que tenham lugar as condições (1) e (2) e que a função seja contínua por corte e limitada no intervalo $[-\pi, \pi]$. É evidente que estas condições são diferentes.

Nota — 1. Se uma função contínua por corte for derivável no ponto x_0, é evidente que as condições (1) e (2) tenham lugar e que se tenha $k_1 = k_2$. Por conseguinte, num ponto de derivabilidade da função $f(x)$, a série de Fourier converge para o valor da função nesse ponto.

Nota — 2. I — A função considerada no exemplo 2 do § 2 (fig. 358) verifica as condições (1) e (2) nos pontos $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ Ela é sempre derivável. Logo a série de Fourier desta função converge em cada ponto para o valor desta função.

II — A função do exemplo 4, § 2 (fig. 361) verifica as condições (1) e (2) nos pontos $\pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi$. Ela é derivável para todo o valor, logo representável por uma série de Fourier em cada ponto.

III — A função do exemplo 1, § 3 (fig. 357) é descontínua nos pontos $\pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi$. É sempre derivável, logo a série de Fourier converge para o valor desta função em todos os pontos, excepto nos pontos de descontinuidade. Nos pontos de descontinuidade, a soma da série de Fourier é igual à média aritmética dos valores limites da função à esquerda e à direita: é nula no caso considerado.

§ 11. Análise harmónica numérica

A teoria da decomposição das funções em séries de Fourier chama-se *análise harmónica*. Vamos fazer, agora, algumas observações sobre o cálculo aproximado dos coeficientes de Fourier, isto é, sobre a análise harmónica numérica.

Como se sabe, os coeficientes de Fourier da função $f(x)$ de período 2π são definidos pelas fórmulas

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx; \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,kx\,dx.$$

Em muitos casos encontrados em prática, a função $f(x)$ é dada quer sob a forma de quadro (quando a dependência funcional é obtida experimentalmente) quer por uma curva traçada por um aparelho. O cálculo dos coeficientes de Fourier faz-se, então, por meio de métodos de integração aproximada (ver § 8, cap. XI, t. I).

Consideremos o segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ de comprimento 2π. Pode-se sempre reduzir a este caso, escolhendo convenientemente a unidade sobre o eixo Ox.

Dividamos o segmento $[-\pi, \pi]$ em n partes iguais pelos pontos

$$x_0 = -\pi,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n = \pi.$$

O comprimento dum segmento parcial é, então,

$$\Delta x = \frac{2\pi}{n}.$$

Designemos os valores da função $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots,$ por x_n

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n.$$

Tomamos estes valores quer no quadro, quer sobre a curva da função.

Utilizando, por exemplo, a fórmula dos rectângulos (ver fórmula (1), § 8, cap. XI, t. I), determinam-se os coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad a_k = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \cos kx_i,$$

$$b_k = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\,\text{sen}\,kx_i.$$

Têm sido elaborados esquemas, que simplificam o cálculo dos coeficientes de Fourier. Não podemos aqui perder-nos em detalhes, mas indiquemos que existem aparelhos (chamados analizadores harmónicos) que, segundo o gráfico da função dada, permitem calcular aproximadamente os coeficientes de Fourier.

§ 12. O integral de Fourier

Seja $f(x)$ uma função definida em qualquer intervalo $(-\infty, \infty)$ e absolutamente integrável nestę intervalo, isto é, que o integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = Q \qquad (1)$$

existe. Suponhamos, além disso, que $f(x)$ admite um desenvolvimento em série de Fourier em qualquer intervalo $(-l, +l)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi}{l}x + b_k \operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x, \qquad (2)$$

onde

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}t\, dt, \qquad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}t\, dt. \qquad (3)$$

Substituindo na série (2) os valores dos coeficientes a_k e b_k tirados das fórmulas (3), pode-se escrever:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}t\, dt\right)\cos\frac{k\pi}{l}x +$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}t\, dt\right)\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, dt +$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\cos\frac{k\pi}{l}t\cos\frac{k\pi}{l}x + \operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}t\operatorname{sen}\frac{k\pi}{l}x\right] dt$$

ou

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi(t-x)}{l}\, dt. \qquad (4)$$

Estudemos o problema da forma do desenvolvimento (4) quando se passa a limite para $l \to \infty$.

Introduzamos as notações seguintes:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \alpha_2 = \frac{2\pi}{l}, \ \ldots, \ \alpha_k = \frac{k\pi}{l}, \ \ldots \ \text{et} \ \ \Delta\alpha_k = \frac{\pi}{l}. \tag{5}$$

Substituindo-as em (4) teremos:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-}^{l} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^{l} f(t) \cos \alpha_k (t - x)\, dt \right) \Delta\alpha_k. \tag{6}$$

Quando $l \to \infty$ o primeiro termo do segundo membro tende para zero. Com efeito,

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt \right| \leqslant \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} |f(t)|\, dt < \frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt = \frac{1}{2l} Q \to 0.$$

Para cada valor fixo de l a expressão entre parêntesis é uma função de α_k (ver fórmulas (5)) tomando os seus valores de $\frac{\pi}{l}$ a ∞. Notemos, sem o demonstrar, que se a função $f(x)$ for monótona por corte em cada intervalo infinito, limitada no intervalo infinito e que satisfaz à condição (1) a fórmula (6) tomará, se $l \to +\infty$, a forma

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha (t - x)\, dt \right) d\alpha. \tag{7}$$

A expressão da direita chama-se *integral de Fourier* da função $f(x)$.

A igualdade (7) tem lugar para todos os pontos em que a função é contínua. Nos pontos de descontinuidade é a igualdade

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha (t - x)\, dt \right) dx = \frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2} \tag{7'}$$

que é verificada.

Transformemos o integral do segundo membro da igualdade (7) desenvolvendo $\cos \alpha (t - x)$:

$$\cos \alpha (t - x) = \cos \alpha t \cos \alpha x + \operatorname{sen} \alpha t \operatorname{sen} \alpha x.$$

Substituindo esta expressão na fórmula (7) e fazendo sair $\cos \alpha x$ e $\operatorname{sen} \alpha x$ de debaixo do sinal de integração nos integrais em que a integração é realizada na variável t, obtemos

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt \right) \cos \alpha x \, d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \alpha t \, dt \right) \operatorname{sen} \alpha x \, d\alpha. \quad (8)$$

Cada um dos integrais em t, situados entre parêntesis, existe, porque a função $f(t)$ é absolutamente integrável no intervalo $(-\infty, +\infty)$ de modo que as funções $f(t) \cos \alpha t$ e $f(t) \operatorname{sen} \alpha t$ são também absolutamente integráveis.

Consideremos os casos particulares da fórmula (8).

1. Suponhamos que $f(x)$ é par. Neste caso $f(t) \cos \alpha t$ é uma função par e $f(t) \operatorname{sen} \alpha t$ uma função ímpar de modo que temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \alpha t \, dt = 0.$$

Neste caso a fórmula (8) põe-se sob a forma

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt \right) \cos \alpha x \, d\alpha. \quad (9)$$

2. Suponhamos que $f(x)$ é ímpar. Analizando a natureza dos integrais da fórmula (8), teremos neste caso:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \alpha t \, dt \right) \operatorname{sen} \alpha x \, d\alpha. \quad (10)$$

Se a função $f(x)$ não é definida senão no intervalo $(0, \infty)$, pode-se representá-la para $x > 0$ tanto pela fórmula (9) como pela fórmula 10. No primeiro caso definimo-la complementarmente para o intervalo $(-\infty, 0)$ sob a condição de a função ser par e no segundo ser ímpar.

Sublinhamos, uma vez mais, que nos pontos que apresentem descontinuidades convém substituir $f(x)$ nos primeiros membros das igualdades (9) e (10) pela expressão

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

Voltemos à fórmula (8). Os integrais entre parêntesis são funções de α. Introduzamos as notações:

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt,$$

$$B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\text{sen}\,\alpha t\,dt.$$

Então, pode-se escrever a fórmula (8) sob a forma:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}[A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\,\text{sen}\,\alpha x]\,d\alpha. \tag{11}$$

Diz-se que a fórmula (11) dá o desenvolvimento da função $f(x)$ em harmónicas de frequência α que variam duma maneira contínua de 0 a ∞. A lei de distribuição das amplitudes e das fases iniciais em função da frequência α é expressa pelas funções $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$.

Voltemos à fórmula (9). Façamos

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt. \tag{12}$$

A fórmula (9) toma, então, a forma

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} F(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha. \tag{13}$$

A função $F(\alpha)$ chama-se *transformada-cosseno de Fourier* da função $f(x)$.

Se na igualdade (12) $F(\alpha)$ for a função dada e $f(t)$ a função procurada, será, então, uma equação integral para a função $f(t)$. A fórmula (13) dá a solução desta equação.

Com base na fórmula (10), pode-se escrever as seguintes igualdades:

$$\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \operatorname{sen} \alpha t \, dt, \tag{14}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \Phi(\alpha) \operatorname{sen} \alpha x \, d\alpha. \tag{15}$$

A função $\Phi(\alpha)$ chama-se *transformada-seno* de Fourier da função $f(x)$.

Exemplo — Seja

$$f(x) = e^{-\beta x} \quad (\beta > 0, \ x \geqslant 0).$$

Determina-se, segundo a fórmula (12), a transformada-cosseno de Fourier:

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\beta t} \cos \alpha t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{\beta^2 + \alpha^2}.$$

Segundo a fórmula (14) determina-se a transformada-seno de Fourier:

$$\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\beta t} \operatorname{sen} \alpha t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\beta^2 + \alpha^2}.$$

Com a ajuda das fórmulas (13) e (15), obtém-se as relações recíprocas:

$$\frac{2\beta}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{\beta^2 + \alpha^2} \, d\alpha = e^{-\beta x} \quad (x \geqslant 0)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha \operatorname{sen} \alpha x}{\beta^2 + \alpha^2} \, d\alpha = e^{-\beta x} \quad (x > 0).$$

§ 13. Forma complexa do integral de Fourier

No integral de Fourier (fórmula (7), § 12) a função de α, que se encontra entre parêntesis, é par e, por conseguinte, é igualmente determinada para os valores negativos de α. Em virtude do que acabámos de dizer pode-se recopiar a fórmula (7) sob a forma:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha (t - x) \, dt \right) d\alpha. \tag{1}$$

Consideremos, agora, a expressão seguinte idênticamente nula

$$\int_{-M}^{M}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}\alpha(t-x)\,dt\Big)d\alpha=0.$$

O primeiro membro é idênticamente igual a zero, porque a função de α entre parêntesis é uma função ímpar e o integral duma função ímpar tomada nos limites de $-M$ a $+M$ é igual a zero.

É evidente que

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}\alpha(t-x)\,dt\Big)d\alpha=0$$

ou

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}\alpha(t-x)\,dt\Big)\,d\alpha=0. \tag{2}$$

Nota — Notar-se-á aqui o facto seguinte: o integral convergente nos limites infinitos é definido como se segue:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\,d\alpha=\int_{-\infty}^{c}\varphi(\alpha)\,d\alpha+\int_{c}^{\infty}\varphi(\alpha)\,d\alpha=$$

$$=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{c}\varphi(\alpha)\,d\alpha+\lim_{M\to\infty}\int_{c}^{M}\varphi(\alpha)\,d\alpha \qquad (^*)$$

com a condição de cada um dos limites do segundo membro existir (ver § 7, cap. XI t. I). Ora, escrevemos na igualdade (2):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\,d\alpha=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\varphi(\alpha)\,d\alpha. \qquad (^{**})$$

Pode suceder, pois, que o limite (**) exista embora os limites do segundo membro da igualdade (*) não existam. A expressão do segundo membro da igualdade (**) chama-se *valor principal do integral*. Assim, consideremos na igualdade (2) o valor principal do integral impróprio (exterior). É neste sentido que se deve compreender os integrais que encontramos neste parágrafo.

Multipliquemos os membros da igualdade (2) por $\frac{i}{2\pi}$ e acrescentemo-los às partes correspondentes da igualdade (1); obtém-se, então:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\cos\alpha(t-x)+i\operatorname{sen}\alpha(t-x)\right)dt\right]d\alpha$$

ou

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t), e^{i\alpha(t-x)} \, dt \right] d\alpha. \tag{3}$$

É precisamente a *forma complexa do integral de Fourier.* Pode-se pô-la sob a forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\alpha t} \, dt \right) e^{-i\alpha x} \, d\alpha.$$

Esta última igualdade permite-nos escrever:

$$F^*(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\alpha t} \, dt, \tag{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\alpha)\, e^{-i\alpha x} \, d\alpha. \tag{5}$$

A função $F^*(\alpha)$ definida pela fórmula (4) chama-se *transformada de Fourier* da função $f(t)$. A função $f(x)$ definida pela fórmula (5) chama-se *transformada inversa de Fourier* para a função $F^*(\alpha)$ (as transformadas diferem pelo sinal de i).

Exercícios

1 Desenvolver em série de Fourier no intervalo $(-\pi, \pi)$ a função)

$$f(x) = 2x \text{ para } 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$
$$f(x) = x \text{ para } -\pi < x \leqslant 0.$$

Rép. $\frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) +$

$$+ 3\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \ldots\right).$$

3. Utilizar o desenvolvimento em seno da função $f(x) = 1$ no intervalo $(0, \pi)$ para calcular a soma da série $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ Resp. $\frac{\pi}{4}$.

2. Utilizar o desenvolvimento em série de Fourier da função $f(x) = x^2$ para calcular a soma da série $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$ Resp. $\frac{\pi^2}{12}$.

4. Desenvolver em série de Fourier no intervalo $(-\pi, \pi)$ a função $f(x)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}$. Resp. $\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\frac{\cos 4x}{4^2}+\ldots$

5. Desenvolver em série de Fourier no intervalo $(-\pi, \pi)$ a função

$$f(x)=-\frac{(\pi+x)}{2} \text{ para } -\pi\leqslant x<0,$$

$$f(x)=\frac{1}{2}(\pi-x) \text{ para } 0\leqslant x<\pi.$$

Resp. $\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x+\ldots$

6. Desenvolver em série de Fourier no intervalo $(-\pi, \pi)$ a função

$$f(x)=-x \text{ para } -\pi<x\leqslant 0,$$
$$f(x)=0 \text{ para } 0<x\leqslant\pi.$$

Resp. $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}$.

7. Desenvolver em série de Fourier no intervalo $(-\pi, \pi)$ a função

$$f(x)=1 \text{ para } -\pi<x\leqslant 0,$$
$$f(x)=-2 \text{ para } 0<x\leqslant\pi.$$

Resp. $-\frac{1}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}$.

8. Desenvolver a função $f(x)=x^2$ no intervalo $(0, \pi)$ em série de senos.

Resp. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}[(-1)^n-1]\right\}\operatorname{sen} nx$.

9. Desenvolver a função $y=\cos 2x$ no intervalo $(0, \pi)$ em série de senos.

Resp. $-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{2^2-1}+\frac{3\operatorname{sen} 3x}{2^2-3^2}+\frac{5\operatorname{sen} 5x}{2^2-5^2}+\ldots\right]$.

10. Desenvolver a função $y=\operatorname{sen} x$ no intervalo $(0, \pi)$ em série de cossenos.

Resp. $\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{1-2^2}+\frac{\cos 4x}{1-4^2}+\ldots\right]$.

11. Desenvolver em série de Fourier a função $y=e^x$ no intervalo $(-l, l)$.

Resp. $\frac{e^l-e^{-l}}{2l}+l(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}+$

$$+\pi(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}$$

12. Desenvolver a função $f(x) = 2x$ no intervalo (0, 1) em série de senos.

Resp. $1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n}$

13. Desenvolver a função $f(x) = x$ no intervalo $(0, l)$ em série de senos.

Resp. $\frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}}{n}$.

14. Desenvolver a função

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ para } 0 < x \leqslant 1, \\ 2 - x \text{ para } 1 < x < 2 \end{cases}$$

no intervalo (0, 2): *a)* em série de senos; *b)* em série de cossenos.

Resp. a) $\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2}$;

b) $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos (2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$

Capítulo XVIII

EQUAÇÕES DA FÍSICA MATEMÁTICA

§ 1. Principais tipos de equações da física matemática

Chamam-se equações principais da física matemática (no caso duma função de duas variáveis independentes) às equações diferenciais seguintes às derivadas parciais da segunda ordem.

I — *Equação da onda:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

Somos levados a considerar esta equação quando do estudo dos processos das vibrações transversais duma corda, das vibrações longitudinais dum tronco, das oscilações da corrente eléctrica num fio, das vibrações de torção da árvore, das oscilações dos gases, etc. Esta equação é a mais simples do *tipo hiperbólico.*

II — *Equação do calor ou equação de Fourier:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Somos levados ao estudo desta equação quando em presença de problemas apresentados pelos processos de difusão do calor, da filtração de líquidos ou de gases num meio poroso (por exemplo, a filtração do petróleo e dos gases nos grés sob cobertura), de certos problemas da teoria das probabilidades, etc. É a equação mais simples do *tipo parabólico.*

III — *Equação de Laplace:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{3}$$

Somos levados ao estudo desta equação uma vez postos em presença de problemas apresentados pelos campos eléctricos e magnéticos, o estado estacionário de calor, a hidrodinâmica, a difusão, etc. É a equação mais simples do *tipo elíptico.*

Nas equações (1), (2) e (3) a função procurada u depende de duas variáveis. Pode-se igualmente estudar as equações correspondentes ao caso em que a função procurada comporta um maior número de variáveis. Por exemplo, a equação das ondas no caso de três variáveis independentes é da forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \tag{1'}$$

a equação do calor no caso de três variáveis independentes é da forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{2'}$$

a equação de Laplace a três variáveis independentes é da forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{3'}$$

§ 2. Estabelecimento da equação para cordas vibrantes. Formulação do problema aos limites. Estabelecimento da equação para oscilações eléctricas nos fios

Em física matemática entende-se por corda um fio flexível e elástico. As tensões que aparecem na corda num momento arbitrário do tempo são dirigidas segundo a tangente ao seu perfil.

Seja l o comprimento da corda que no instante inicial é dirigido segundo o segmento do eixo Ox de O a l. Suponhamos que as extremidades da corda estão fixadas nos pontos $x = 0$ e $x = l$. Se se desvia a corda da sua posição inicial depois solta-se-la ou se, sem desviar a corda, se imprime aos seus pontos uma certa velocidade ou melhor se se afasta a corda imprimindo ao mesmo tempo uma certa velocidade aos seus pontos, os pontos da corda serão, então, animados dum certo movimento e dir-se-á que a corda vibra. O problema consiste em determinar a forma da corda para todo o instante arbitrário do tempo e em determinar a lei do movimento de cada um dos pontos da corda em função do tempo.

Apenas consideraremos os pequenos desvios dos pontos da corda da sua posição inicial. Pode-se, portanto, admitir que o movimento dos pontos da corda se efectua perpendicularmente ao eixo Ox e num mesmo plano. Nesta hipótese o movimento ondulatório da corda é descrito por uma única função $u(x, t)$ que dá a deslocação do ponto da corda de abcissa x no instante t (fig. 371).

Como apenas consideraremos os pequenos desvios da corda no plano (x, u) podemos supôr que o comprimento do elemento $\widehat{M_1M_2}$ da corda é igual à sua projecção sobre o eixo Ox, isto é (*) que $\widehat{M_1M_2} = x_2 - x_1$. Suporemos do mesmo modo que a tensão é idêntica para todos os pontos da corda; designemo-la por T.

Consideremos o elemento MM' da corda (fig. 372). Nas extremidades deste elemento actuam as forças T segundo a tangente à

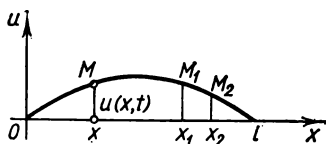



Fig. 371

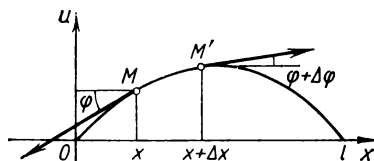



Fig. 372

corda. Suponhamos que as tangentes formam com o eixo Ox os ângulos φ e $\varphi + \Delta\varphi$. A projecção sobre o eixo Ou das forças que actuam sobre o elemento MM' será igual a $T \operatorname{sen}(\varphi + \Delta\varphi) - T \operatorname{sen}\varphi$. Como o ângulo φ é pequeno, pode-se pôr $\operatorname{tg}\varphi \approx \operatorname{sen}\varphi$, e teremos:

$$T \operatorname{sen}(\varphi + \Delta\varphi) - T \operatorname{sen}\varphi \approx$$

$$\approx T \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) - T \operatorname{tg}\varphi = T\left[\frac{\partial u(x + \Delta x,\ t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}\right] =$$

$$= T\frac{\partial^2 u(x + \theta\,\Delta x,\ t)}{\partial x^2}\Delta x \approx T\frac{\partial^2 u(x,\ y)}{\partial x^2}\Delta x, \qquad 0 < \theta < 1$$

(aplicámos aqui o teorema de Lagrange à expressão entre parêntesis).

Para obter a equação do movimento, é preciso igualar à força de inércia as forças exteriores aplicadas ao elemento. Seja ρ a densidade linear da corda. A massa do elemento da corda será $\rho\Delta x$. A aceleração do elemento é $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

(*) Esta hipótese equivale a desprezar a grandeza $u_x'^2$ em relação a 1. Com efeito,

$$\widehat{M_1M_2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x'^2}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(1 + \frac{1}{2} u_x'^2 - \ldots\right) dx \approx \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1.$$

Por conseguinte, teremos em virtude do princípio de d'Alembert:

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x.$$

Simplificando por Δx e fazendo $\frac{T}{\rho} = a^2$ obtemos a equação do movimento

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Obtivemos a equação dita *equação de onda* que é a equação das vibrações da corda. Para determinar completamente o movimento da corda não basta só a equação (1). A função procurada $u(x, t)$ deve ainda satisfazer às condições dos limites, indicando o que se produz nas extremidades da corda ($x = 0$ e $x = l$) e *às condições iniciais*, descrevendo o estado da corda no instante inicial ($t = 0$). Por *condições iniciais* entende-se do mesmo modo o conjunto das condições dos limites e das condições no instante inicial.

Suponhamos, por exemplo, que, como o admitimos, as extremidades da corda para $x = 0$ e $x = l$ são imóveis. Então, para todo o t devem ser verificadas as igualdades:

$$u(0, t) = 0, \tag{2'}$$

$$u(l, t) = 0. \tag{2''}$$

Estas igualdades constituem as *condições dos limites* para o nosso problema.

No momento inicial $t = 0$ a corda possui a forma que lhe demos. Suponhamos que esta forma é definida pela função $f(x)$. Assim deve-se ter

$$u(x, 0) = u|_{t=0} = f(x). \tag{3'}$$

Deve-se, além disso, fixar a velocidade no momento inicial em cada ponto da corda, que é determinada pela função $\varphi(x)$. Assim deve-se ter

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x). \tag{3''}$$

As condições (3') e (3'') são as condições iniciais.

Nota — Em particular, pode-se ter $f(x) \equiv 0$ e $\varphi(x) \equiv 0$. Se estas condições forem verificadas, a corda está em repouso e, por conseguinte, $u(x, t) \equiv 0$.

Como o indicámos mais acima somos conduzidos à equação (1) pelos problemas apresentados no caso das oscilações eléctricas nos condutores. Examinemos este caso. A corrente eléctrica num condutor é caracterizada pela grandeza $i(x, t)$ e a tensão $v(x, t)$, que dependem da coordenada x do ponto do condutor e do tempo t. Considerando um elemento de condutor Δx, podemos escrever que a queda de tensão no elemento Δx é igual a $v(x, t) - v(x + \Delta x, t) \approx -\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x$. Esta queda de tensão forma-se da tensão ohmiana (ohmienne) igual a $iR\,\Delta x$ e da tensão induzida igual a $\frac{\partial i}{\partial t} L\,\Delta x$. Logo

$$-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x = iR\,\Delta x + \frac{\partial i}{\partial t} L\,\Delta x, \tag{4}$$

em que R e L são, respectivamente, a resistência e o coeficiente de auto-indução, calculados para uma unidade de comprimento do condutor. O sinal menos indica que o sentido da corrente é oposto ao crescimento de v. Dividindo por Δx, obtemos a equação

$$\frac{\partial v}{\partial x} + iR + L\frac{\partial i}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

A diferença das intensidades da corrente que entra e sai do elemento Δx no decorrer do tempo Δt será

$$i(x, t) - i(x + \Delta x, t) \approx -\frac{\partial i}{\partial x}\Delta x\,\Delta t.$$

Ela é dispendida pela carga do elemento igual a $C\,\Delta x\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t$ e a fuga pela superfície lateral do condutor, em consequência da imperfeição do isolamento, igual a $Av\Delta x\Delta t$ (A designa aqui o coeficiente de fuga). Igualando estas expressões e dividindo por $\Delta x\Delta t$ obtemos a equação

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial t} + Av = 0. \tag{6}$$

Costuma-se chamar às equações (5) e (6) *equações do telégrafo*.

Pode-se obter do sistema de equações (5) e (6) uma equação contendo apenas a função desconhecida $i(x, t)$ e uma equação que contenha apenas a função desconhecida $v(x, t)$. Derivemos os termos

da equação (6) em relação a x e os termos da equação (5) em relação a t e multipliquemo-las por C. Subtraindo uma da outra obtemos:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + A\frac{\partial v}{\partial x} - CR\frac{\partial i}{\partial x} - CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0.$$

Substituindo nesta última equação $\frac{\partial v}{\partial x}$ pela sua expressão tirada da equação (5), obtemos:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + A\left(-iR - L\frac{\partial i}{\partial t}\right) - CR\frac{\partial i}{\partial x} - CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (CR + AL)\frac{\partial i}{\partial t} + ARi. \tag{7}$$

Duma maneira análoga, obtém-se uma equação determinante $v(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (CR + AL)\frac{\partial v}{\partial t} + ARv. \tag{8}$$

Se se puder desprezar a fuga de corrente pelo isolamento ($A = 0$) e a resistência ($R = 0$) as equações (7) e (8) reduzem-se a equações de onda:

$$a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \qquad a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

em que se designou $a^2 = \frac{1}{CL}$. As condições iniciais e os limites são formulados para o problema tendo em conta as condições físicas.

§ 3. Resolução da equação das cordas vibrantes pelo método de separação das variáveis (*método de Fourier*)

O método de separação das variáveis (ou método de Fourier) que vamos considerar é típico para a resolução de numerosos problemas de física matemática. Seja determinar a solução da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

satisfazendo às condições iniciais:

$$u(0,\ t) = 0, \tag{2}$$

$$u(l,\ t) = 0, \tag{3}$$

$$u(x,\ 0) = f(x), \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x). \tag{5}$$

Procuraremos uma solução particular (não idênticamente nula) da equação (1) que satisfaz às condições dos limites (2) e (3) sob a forma de produto de duas funções $X(x)$ e $T(t)$ de que a primeira apenas depende de x e a segunda de t:

$$u(x,\ t) = X(x)\,T(t). \tag{6}$$

Efectuando esta substituição na equação (1) obtemos: $X(x)\,T''(t) = a^2 X''(x)\,T(t)$ e dividindo os termos da igualdade por a^2XT

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X}. \tag{7}$$

O primeiro membro desta igualdade contém uma função que não depende de x, e o segundo uma função que não depende de t. A igualdade (7) não pode ter lugar a não ser no caso em que o o primeiro e o segundo membros não dependam nem de x nem de t, por outras palavras, sejam iguais a um número constante. Designemo-lo por $-\lambda$ em que $\lambda > 0$ (consideraremos mais adiante o caso $\lambda < 0$). Então,

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Obtemos destas igualdades duas equações:

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{8}$$

$$T'' + a^2\lambda T = 0. \tag{9}$$

As soluções gerais destas equações são (ver. cap. XIII, § 21, t. I):

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\lambda}\,x, \tag{10}$$

$$T(t) = C\cos a\sqrt{\lambda}\,t + D\,\mathrm{sen}\,a\sqrt{\lambda}\,t, \tag{11}$$

em que A, B, C, D são constantes arbitrárias.

Substituindo as expressões de $X(x)$ e $T(t)$ na igualdade (6), obtemos:

$$u(x, t) = (A \cos \sqrt{\lambda}\, x + B \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, x)(C \cos a \sqrt{\lambda}\, t + D \operatorname{sen} a \sqrt{\lambda}\, t).$$

Escolhamos agora as constantes A e B de maneira que sejam verificadas as condições (2) e (3). Como $T(t) \not\equiv 0$ (no caso contrário teríamos $u(x, t) \equiv 0$, o que contradiz a nossa hipótese), a função $X(x)$ deve verificar as condições (2) e (3), isto é, que se deve ter $X(0) = 0$, $X(l = 0)$. Substituindo os valores $x = 0$ e $x = l$ na igualdade (10), obtemos, em virtude de (2) e (3):

$$0 = A \cdot 1 + B \cdot 0,$$

$$0 = A \cos \sqrt{\lambda}\, l + B \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, l.$$

A primeira equação dá-nos $A = 0$ e resulta da segunda:

$$B \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, l = 0.$$

$B \neq 0$, porque no caso contrário teríamos $X \equiv 0$ e $u \equiv 0$, o que contradiz a hipótese. Por conseguinte, deve-se ter

$$\operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, l = 0,$$

donde

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{12}$$

(não tomamos o valor $n = 0$, porque neste caso teríamos $X \equiv 0$ e $u \equiv 0$). Obtemos assim:

$$X = B \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x. \tag{13}$$

Os valores obtidos de λ chamam-se *valores próprios* para o problema dos limites dado. As funções $X(x)$ correspondentes chamam-se *funções próprias*.

Nota — Se tivessemos tomado em vez de $-\lambda$ a expressão $+\lambda = k^2$, a equação (8) seria da forma

$$X'' - k^2 X = 0.$$

A solução geral desta equação é:

$$X = A e^{kx} + B e^{-kx}.$$

A solução além de zero no caso duma equação desta forma não pode verificar as condições dos limites (2) e (3).

Conhecendo $\sqrt{\lambda}$ podemos, utilizando a igualdade (11), escrever:

$$T(t) = C \cos \frac{an\pi}{l} t + D \operatorname{sen} \frac{an\pi}{l} t \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

Para cada valor de n, e, por conseguinte, por cada λ, substituindo as expressões (13) e (14) na igualdade (6), obtemos a solução da equação (1) que verifica as condições dos limites (2) e (3). Designemos esta solução por $u_n(x, t)$:

$$u_n(x, t) = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \operatorname{sen} \frac{an\pi}{l} t \right). \tag{15}$$

Para cada valor de n podemos escolher as constantes C e D e eis porque escrevemos C_n e D_n (a constante B está inclusa em C_n e D_n). Como a equação (1) é linear e homogénea, a soma das soluções é também uma solução e eis porque a função representada pela série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

ou

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \operatorname{sen} \frac{an\pi}{l} t \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \tag{16}$$

é também uma solução da equação diferencial (1) que verifica as condições dos limites (2) e (3). É evidente que a série (16) não será a solução da equação (1) a não ser no caso em que os coeficientes C_n e D_n sejam tais que esta série convirja e que convirjam as séries obtidas depois da derivação termo a termo em relação a x e a t.

A solução (16) deve ainda satisfazer às condições iniciais (4) e (5). Obtê-la-emos por uma escolha adequada das constantes C_n e D_n. Fazendo na igualdade (16) $t = 0$, obtemos (comp. a condição (4)):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x. \tag{17}$$

Se a função $f(x)$ é tal que se pode desenvolvê-la em série de Fourier (ver § 1, cap. XVII) no intervalo $(0, l)$ a condição (17) será verificada se se fizer

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \, dx. \tag{18}$$

Depois, derivando os termos da igualdade (18) em relação a t e fazendo $t = 0$, obtemos em virtude da condição (5) a igualdade

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x.$$

Determinemos os coeficientes de Fourier desta série:

$$D_n \frac{an\pi}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

ou

$$D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \, dx. \tag{19}$$

Demonstramos, assim, que a série (16) cujos coeficientes C_n e D_n são determinados pelas fórmulas (18) e (19) representa, se ela for duplamente derivável termo a termo, a função $u(x, t)$ que é a solução da equação (1) e verifica as condições iniciais e os limites (2)-(5).

Nota — Resolvendo o problema considerado para a equação da onda por um outro método pode-se demonstrar que a série (16) é igualmente a solução no caso em que não for derivável termo a termo. A função $f(x)$ deve, então, ser duas vezes derivável e $\varphi(x)$ uma vez derivável.

§ 4. Equação da propagação do calor numa barra. Enunciado do problema aos limites

Consideremos uma barra homogénea de comprimento l. Suporemos que as perdas são eliminadas por isolamento térmico da superfície

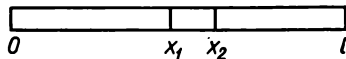



Fig. 373

lateral da barra e que em cada ponto da sua secção transversal a temperatura é idêntica. Estudemos o processo da propagação do calor na barra.

Disponhamos o eixo Ox de maneira que uma das extremidades da barra coincida com o ponto $x = 0$ e o outro com o ponto $x = l$ (fig. 373).

Seja $u(x, t)$ a temperatura na secção da barra de abcissa x no instante t. Estabeleceu-se, experimentalmente, que a velocidade de propagação do calor, isto é, a quantidade de calor que penetra pela secção de abcissa x no decorrer dum intervalo de tempo unitário, é determinada pela fórmula

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial x} S, \tag{1}$$

em que S designa a superfície da secção da barra considerada, k o coeficiente de condução térmica (*).

Consideremos o elemento da barra, compreendido entre as secções de abcissas x_1 e x_3 ($x_2 - x_1 = \Delta x$). A quantidade de calor que passa pela secção de abcissa x_1 no decorrer do tempo Δt será

$$\Delta Q_1 = -k \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} S\,\Delta t, \tag{2}$$

de igual modo para a secção de abcissa x_2:

$$\Delta Q_2 = -k \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2} S\,\Delta t. \tag{3}$$

A quota de calor $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ no elemento da barra no decurso de tempo Δt será igual a

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \left[-k \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} S\,\Delta t\right] - \left[-k \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2} S\,\Delta t\right] \approx$$

$$\approx k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x S\,\Delta t \tag{4}$$

$\left(\text{aplicamos o teorema de Lagrange à diferença } \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2}\right)$.

Esta quota de calor no decurso de tempo Δt é consumida com a elevação da temperatura do elemento da barra duma grandeza Δu:

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c\rho \Delta x S\,\Delta u$$

(*) A velocidade de propagação do calor, ou a velocidade do fluxo de calor, é determinada por:

$$q = \lim \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

em que ΔQ designa a quantidade de calor que passa pela secção S no decurso do tempo Δt.

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 \approx c\rho \Delta x S \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t, \tag{5}$$

em que c designa a capacidade calorífica da substância da barra, e a densidade da substância da barra ($\rho \Delta x S$ é a massa do elemento da barra).

Igualando as expressões (4) e (5) da mesma quantidade de calor $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$, obtemos:

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x S \Delta t = c\rho \Delta x S \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Designando $\frac{k}{c\rho} = a^2$, obtemos, finalmente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6}$$

É a equação da *propagação do calor* (*equação do calor*) numa barra homogénea.

Para que a solução da equação (6) seja inteiramente determinada, a função $u(x, t)$ deve verificar as condições iniciais, correspondentes às condições físicas do problema. As condições iniciais para a solução da equação (6) podem ser diversas. As condições correspondentes ao *primeiro problema dos limites* para $0 \leqslant t \leqslant T$ são as seguintes:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{7}$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \tag{8}$$

$$u(l, t) = \psi_2(t). \tag{9}$$

Do ponto de vista físico a condição (7) (condição inicial) corresponde a como se para $t = 0$ a temperatura nas diferentes secções da barra fosse dada igual a $\varphi(x)$. As condições (8) e (9) (condições dos limites) correspondem a como se as extremidades da barra para $x = 0$ e $x = 1$ mantivessem uma temperatura igual, respectivamente, a $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$.

Demonstra-se que a equação (6) tem uma solução única no domínio $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ que verifica as condições (7), (8) e (9).

§ 5. Propagação do calor no espaço

Consideremos o processo de propagação do calor no espaço a três dimensões. Seja $u(x, y, z, t)$ a temperatura no ponto de coordenadas (x, y, z) no instante t. Estabeleceu-se, empìricamente, que a velocidade de passagem do calor pela superfície Δs, isto é, a quantidade de calor fornecida durante a unidade de tempo, é determinada pela fórmula (análoga à fórmula (1) do parágrafo anterior)

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial n} \Delta s, \tag{1}$$

em que k designa o coeficiente de condução térmica do meio considerado que supomos homogéneo e isotrópico, n o sector unitário orientado segundo a normal à superfície Δs no sentido de propagação do calor. Em virtude do § 14, cap. VIII, tomo I, podemos escrever

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

em que $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ são os cossenos directores do vector n, ou

$$\frac{\partial u}{\partial n} = n \operatorname{grad} u.$$

Usando a expressão $\frac{\partial u}{\partial n}$ na fórmula (1), obtemos:

$$\Delta Q = -kn \operatorname{grad} u \, \Delta s.$$

A quantidade de calor que passa no decurso do tempo Δt pela superfície Δs, será igual a

$$\Delta Q \, \Delta t = -kn \operatorname{grad} u \, \Delta t \Delta s.$$

Voltemos ao problema que apresentamos no começo deste parágrafo. No meio considerado isolemos um pequeno volume V limitado pela superfície S.

A quantidade de calor que se propaga pela superfície S será

$$Q = -\Delta t \iint_S kn \operatorname{grad} u \, ds, \tag{2}$$

em que n é o vector unitário orientado segundo a normal exterior à superfície S.

É evidente que a fórmula (2) dá a quantidade de calor que penetra no volume V (ou que deixa o volume V) no decurso do tempo Δt. A quantidade de calor que penetra no volume V conduz ao aquecimento da substância desse volume.

Consideremos um volume elementar Δv. Suponhamos que no decurso de lapso de tempo Δt a sua temperatura é elevada de Δu. É evidente que a quantidade de calor consumida para elevar a temperatura do elemento Δv será igual a

$$c\,\Delta v \rho\,\Delta u \approx c \Delta v \rho \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t,$$

em que c é a capacidade calorífica da matéria e ρ a densidade. A quantidade global de calor consumido no aquecimento no volume V no decurso do tempo Δt será

$$\Delta t \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dv.$$

Mas é a quantidade de calor que ao penetrar no volume V no decurso do tempo Δt, é determinada pela fórmula (2). Temos, assim, a igualdade

$$\Delta t \iint_S kn \operatorname{grad} u\, ds = \Delta t \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dv$$

Dividindo por Δt, obtemos:

$$\iint_S kn \operatorname{grad} u\, ds = \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dv. \qquad (3)$$

O integral de superfície, que forma o primeiro membro desta equação, pode ser transformado segundo a fórmula de Ostrogradsky (ver § 8, cap. XV) fazendo $F = k \operatorname{grad} u$:

$$\iint_S (k \operatorname{grad} u)\, n\, ds = \iiint_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\, dv.$$

Substituindo o integral duplo do primeiro membro da igualdade (3) por um integral triplo, obtemos:

$$\iiint_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\, dv = \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dv$$

ou

$$\iiint_V \left[\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\right] dv = 0. \qquad (4)$$

Aplicando o teorema da média ao integral triplo do primeiro membro (ver § 12, cap. XIV), obtemos:

$$\left[\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x=x_1,\, y=y_1,\, z=z_1} = 0, \tag{5}$$

em que $P(x, y, z)$ é um ponto do volume V.

Como podemos considerar um volume arbitrário V no espaço a três dimensões, em que se efectua a propagação do calor e como supomos que a função sob o sinal de integração na igualdade (4) é contínua, a igualdade (5) será verificada em cada ponto do espaço. Assim

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u). \tag{6}$$

Mas

$$k \operatorname{grad} u = k \frac{\partial u}{\partial x} \boldsymbol{i} + k \frac{\partial u}{\partial y} \boldsymbol{j} + k \frac{\partial u}{\partial z} \boldsymbol{k}$$

(ver § 14, cap. VIII, t. I) e

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

(ver § 9, cap. XV). Substituindo na equação (6) teremos:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{7}$$

Se k é uma constante, então,

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = k \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

e a equação (6) dá neste caso

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

ou fazendo $\frac{k}{c\rho} = a^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{8}$$

Sob uma forma resumida a equação (8) escreve-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

em que $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ é o operador de Laplace. *A equação (8) é a equação da propagação do calor no espaço a três dimensões.* Para obter a sua solução única que satisfaz ao problema apresentado é preciso dar-se as condições iniciais.

Suponhamos que temos um corpo Ω cuja superfície é σ. Considere-se neste corpo o processo de propagação do calor. No momento inicial a temperatura do corpo é dada. Isso corresponde a como se conhecessem os valores iniciais para $t = 0$, por outras palavras às *condiões iniciais:*

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z) \tag{9}$$

Além disso deve-se conhecer a temperatura em qualquer ponto M da superfície σ do corpo em qualquer momento t de tempo, as *condições dos limites:*

$$u(M, t) = \psi(M, t) \tag{10}$$

(Outras condições de limites são possíveis).

Se a função procurada $u(x, y, z, t)$ não dependesse de z, isso corresponderia a como se a temperatura não dependesse de z, obteríamos a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{11}$$

dita *equação da propagação do calor sobre o plano.* Se se considerar a propagação do calor num domínio plano D de fronteira C, as condições dos limites do mesmo modo que (9) e (10) são, então, assim formuladas:

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y),$$

$$u(M, t) = \psi(M, t),$$

em que φ e ψ são funções dadas, M um ponto da fronteira C.

Se a função u não depender nem de z nem de y, obtemos a equação $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dita *equação da propagação do calor numa barra.*

§ 6. Resolução do primeiro problema dos limites para a equação do calor pelo método das diferenças finitas

Do mesmo modo que para o caso das equações diferenciais ordinárias, por ocasião da resolução das equações das derivadas parciais pelo método das diferenças finitas as derivadas são substituídas pelas diferenças correspondentes (ver fig. 374):

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x} \approx \frac{u(x+h,\ t)-u(x,\ t)}{h} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h}\left[\frac{u(x+h,\ t)-u(x,\ t)}{h} - \frac{u(x,\ t)-u(x-h,\ t)}{h}\right]$$

ou

$$\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h,\ t)-2u(x,\ t)+u(x-h,\ t)}{h^2}; \tag{2}$$

duma maneira análoga

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} \approx \frac{u(x,\ t+l)-u(x,\ t)}{l} \tag{3}$$

O primeiro problema dos limites para a equação do calor (ver § 4) enuncia-se da maneira seguinte. Pede-se para determinar a solução da equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

que verifica as condições iniciais

$$u(x,\ 0)=\varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant L, \tag{5}$$

$$u(0,\ t)=\psi_1(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{6}$$

$$u(l,\ t)=\psi_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{7}$$

isto é, determinar a solução $u(x,\ t)$ no rectângulo delimitado pelas rectas $t=0$, $x=0$, $x=L$, $t=T$ se se conhecer os valores da função procurada sobre três dos seus dados: $t=0$, $x=0$, $x=L$ (fig. 375). Cerquemos este rectângulo duma grade formada pelas rectas

$$x = ih, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$t = kl, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,$$

e determinemos os valores aproximados das soluções nos nós desta grade, isto é, nos pontos de intersecção destas rectas. Introduzamos as notações: $u(ih, kl) = u_{i,k}$. Escrevamos em vez da equação (4) as equações cor-

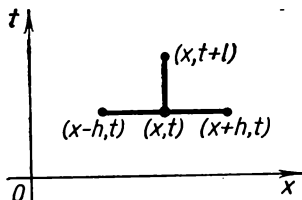



Fig. 374

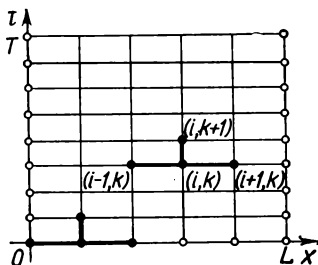



Fig. 375

respondentes em diferenças finitas para o ponto (ih, kl). Em conformidade com as fórmulas (3) e (2) obtemos:

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l} = a^2 \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{h^2} \tag{8}$$

Definamos $u_{i,k+1}$

$$u_{i,k+1} = \left(1 - \frac{2a^2 l}{h^2}\right) u_{i,k} + a^2 \frac{l}{h^2} (u_{i+1,k} + u_{i-1,k}). \tag{9}$$

Resulta da fórmula (9) que se se conhecer os três valores na série de ordem k: $u_{i,k}$, $u_{i+1,k}$, $u_{i-1,k}$, pode-se determinar o valor $u_{i,k+1}$ na série de ordem $(k+1)$. Conhecemos todos os valores sobre a recta $t = 0$ (ver fórmula (5)). Segundo a fórmula (9) determinamos os valores sobre todos os pontos interiores do segmento $t = l$. Os valores nas extremidades deste segmento são-nos conhecidos em virtude das fórmulas (6) e (7) Assim, determinamos fila por fila, os valores da solução procurada para todos os nós da grade.

Está demonstrado que se pode obter, segundo a fórmula (9), um valor aproximado da solução não para um valor arbitrário do quociente dos passos h e l, mas, sòmente no caso em que $l \leqslant \frac{h^2}{2a^2}$ A fórmula (9) simplifica-se particularmente se o passo l segundo o eixo t for escolhido de maneira que

$$1 - \frac{2a^2 l}{h^2} = 0$$

ou

$$l = \frac{h^2}{2a^2}$$

Neste caso a equação (9) toma a forma:

$$u_{i,\,k+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1,\,k} + u_{i-1,\,k}). \tag{10}$$

Esta fórmula é particularmente cómoda para os cálculos (fig. 376). Determina-se, pelo método indicado, a solução entre os nós da grade. O valor da solução entre os nós da grade pode ser obtido, por exemplo, por extrapolação, traçando um plano para todos os três pontos do espaço (x, t, u). Designemos por $u_h(x, t)$ a solução assim obtida com o auxílio da fórmula (10) depois da extrapolação.

(i,k+1)

(i-1,k) (i+1,k)

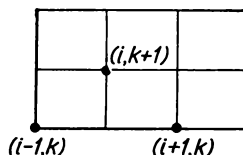
Fig. 376

Demonstra-se que

$$\lim_{h \to 0} u_h(x, t) = u(x, t),$$

em que $u(x, t)$ é a solução do nosso problema. Está, finalmente, demonstrado (*) que

$$|u_h(x, t) - u(x, t)| < Mh^2,$$

em que M é uma constante independente de h.

§ 7. Propagação do calor numa barra infinita

Suponhamos que no instante inicial é fixada a temperatura de diversas secções duma barra infinita. Pede-se para determinar a distribuição da temperatura da barra nos instantes seguintes. (É-se conduzido ao problema da propagação do calor numa barra infinita no caso do estudo dos problemas físicos, sendo o comprimento da barra tão grande que a temperatura dos seus pontos interiores nos momentos considerados apenas depende de muito pouco das condições nas extremidades da barra)

Se a barra coincide com o eixo Ox, o problema matemático enuncia-se da maneira seguinte. Determinar a solução da equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

(*) Um enunciado mais detalhado da questão é dado na obra de L. Collatz «Numerische Behandlung von Differentialgleichungen». Bri. Springer. 1951.

no domínio $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, verificando à condição inicial

$$u(x, 0) = \varphi(x) \tag{2}$$

Apliquemos, para determinar a solução, o método de separação das variáveis (ver § 3), isto é, vamos procurar uma solução particular da equação (1) sob a forma de produto de duas funções:

$$u(x, t) = X(x)\, T(t) \tag{3}$$

Substituindo na equação (1) teremos:

$$X(x)\, T'(t) = a^2 X''\, T(t)$$

ou

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2. \tag{4}$$

Cada um destes quocientes não pode depender nem de x, nem de t e eis porque os igualamos a uma constante (*) $-\lambda^2$. Obtemos de (4) duas equações:

$$T' + a^2\lambda^2 T = 0, \tag{5}$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0. \tag{6}$$

E, resolvendo-as, obtemos:

$$T = Ce^{-a^2\lambda^2 t}.$$

$$X = A \cos \lambda x + B \operatorname{sen} \lambda x$$

Substituindo em (3), obtemos:

$$u_\lambda(x, t) = e^{-a^2\lambda^2 t}\,[A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x] \tag{7}$$

(a constante C está inclusa em $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$).

Para cada valor de λ obtemos uma solução da forma (7). As constantes arbitrárias A e B têm para cada valor de λ valores definidos. Razão porque se pode considerar que A e B são funções de λ. O somatório das soluções da forma (7) é também uma solução em consequência da linearidade da equação (1)):

$$\sum_\lambda e^{-a^2\lambda^2 t}\,[A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x]$$

(*) Como, segundo o sentido do problema $T(t)$ deve ser limitado qualquer que seja t, se $\varphi(x)$ for limitado, $\frac{T'}{T}$ deve ser negativo. Eis porque escrevemos $-\lambda^2$.

Integrando a expressão (7) em relação ao parâmetro λ nos limites de 0 a ∞ obtemos igualmente uma solução

$$u(x, t) = \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x] \, d\lambda, \tag{8}$$

se $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ forem tais que este integral, a sua derivada em relação a t e a sua derivada segunda em relação a x existam e se obtenham derivando o integral em ordem a t e a x. Escolhamos $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ de modo que a solução $u(x, t)$ satisfaça à condição (2). Pondo na igualdade (8) $t = 0$, obtemos em virtude da condição (2):

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \int_0^\infty [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x] \, d\lambda. \tag{9}$$

Suponhamos que a função $\varphi(x)$ é tal que pode ser representada por um integral de Fourier (ver § 12, cap. XVII):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty \varphi(\alpha) \cos \lambda (\alpha - x) \, d\alpha \right) d\lambda.$$

ou

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\left(\int_{-\infty}^\infty \varphi(\alpha) \cos \lambda\alpha \, d\alpha \right) \cos \lambda x + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{-\infty}^\infty \varphi(\alpha) \operatorname{sen} \lambda\alpha \, d\alpha \right) \operatorname{sen} \lambda x \right] d\lambda. \tag{10}$$

Comparando os segundos membros de (9) e (10), obtemos:

$$\left. \begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi(\alpha) \cos \lambda\alpha \, d\alpha, \\ B(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi(\alpha) \operatorname{sen} \lambda\alpha \, d\alpha. \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

Substituindo os valores encontrados de $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ na fórmula (8), obtemos:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \cos \lambda\alpha \, d\alpha \right) \cos \lambda x + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) \operatorname{sen} \lambda\alpha \, d\alpha \right) \operatorname{sen} \lambda x \right] d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) (\cos \lambda\alpha \cos \lambda x + \operatorname{sen} \lambda\alpha \operatorname{sen} \lambda x) \, d\alpha \right] d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \cos \lambda (\alpha - x) \, d\alpha \right) d\lambda$$

ou invertendo a ordem de integração, temos, finalmente:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi(\alpha) \left(\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos \lambda (\alpha - x) \, d\lambda \right) \right] d\alpha. \quad (12)$$

É a solução do problema que havíamos posto. Transformemos a fórmula (12) Calculemos o integral que figura entre parêntesis:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos \lambda (\alpha - x) \, d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \beta z \, dz. \quad (13)$$

Esta transformação do integral foi efectuada com o auxílio das substituições:

$$a\lambda\sqrt{t} = z, \qquad \frac{\alpha - x}{a\sqrt{t}} = \beta \quad (14)$$

Introduzamos a notação

$$K(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \beta z \, dz. \quad (15)$$

Derivando (*) obtemos:

$$K'(\beta) = -\int_0^{\infty} e^{-z^2} z \operatorname{sen} \beta z \, dz.$$

(*) Demonstra-se fàcilmente que se pode derivar.

Integrando por parte, vem:

$$K'(\beta) = \frac{1}{2}[e^{-z^2} \operatorname{sen} \beta z]_0^{\infty} - \frac{\beta}{2}\int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \beta z \, dz$$

ou

$$K'(\beta) = -\frac{\beta}{2} K(\beta).$$

Integrando esta equação diferencial, obtemos:

$$K(\beta) = Ce^{-\frac{\beta^2}{4}} \tag{16}$$

Determinemos a constante C. Resulta de (15):

$$K(0) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(ver § 5, cap. XIV). Por conseguinte, na igualdade (16) deve-se ter

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Assim

$$K(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}} \tag{17}$$

Substituamos o valor (17) do integral (15) em (13):

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos \lambda (\alpha - x) \, d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4}}$$

Substituindo β pela sua expressão (14), obtemos finalmente o valor do integral (13):

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos \lambda (\alpha - x) \, d\lambda = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2 t}} \tag{18}$$

Substituindo esta expressão do integral na solução (12) teremos, finalmente:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2 t}} d\alpha. \tag{19}$$

Esta fórmula, chamada *integral de Poisson*, é a solução do problema posto sobre a propagação do calor numa barra infinita.

Nota — Pode-se demonstrar que a função $u(x, t)$ definida pelo integral (19) é a solução da equação (1) e satisfaz à condição (2) se a função $\varphi(x)$ for limitada no intervalo infinito $(-\infty, \infty)$.

Estabeleçamos o sentido físico da fórmula (19). Consideremos a função

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\infty < x < x_0, \\ \varphi(x) & \text{para } x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \Delta x, \\ 0 & \text{para } x_0 + \Delta x < x < \infty \end{cases} \tag{20}$$

Então, a função

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\infty}^{\infty} \varphi^*(\alpha)\, e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2 t}}\, d\alpha \tag{21}$$

é a solução da equação (1) adoptando para $t = 0$ o valor $\varphi^*(x)$. Em virtude de (20) pode-se escrever:

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \varphi(\alpha)\, e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2 t}}\, d\alpha.$$

Aplicando o teorema da média a este último integral, obtemos:

$$u^*(x, t) = \frac{\varphi(\xi)\,\Delta x}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \qquad x_0 < \xi < x_0 + \Delta x. \tag{22}$$

A fórmula (22) dá o valor da temperatura num ponto da barra em cada instante de tempo se para $t = 0$ a temperatura da barra for em toda a extensão $u^* = 0$, com excepção do segmento $[x_0, x_0 + \Delta x]$ onde é igual a $\varphi(x)$. É precisamente a soma das temperaturas da forma (22) que dá a solução (19). Notemos que se ρ é a densidade linear da barra, e a capacidade calorífica da substância, a quantidade de calor no elemento $[x_0, x_0 + \Delta x]$ para $t = 0$ será

$$\Delta Q \approx \varphi(\xi)\,\Delta x\,\rho c. \tag{23}$$

Consideremos em seguida a função

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \tag{24}$$

Comparando-a ao segundo membro da fórmula (22) e tendo em conta (23) diz-se que ela dá a temperatura em qualquer ponto da barra num momento arbitrário de tempo t, se para $t = 0$ na secção ξ (caso limite quando $\Delta x \to 0$) se encontrasse uma fonte instantânea de calor que dispensasse uma quantidade de calor $Q = c\rho$.

§ 8. Problemas que conduzem ao estudo das soluções das equações de Laplace. Enunciado dos problemas de limites

Neste parágrafo consideraremos certos problemas que conduzem à resolução da *equação de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Como já mencionamos, o primeiro membro da equação (1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \Delta u$$

é chamado *operador de Laplace*. As funções u que verificam a equação de Laplace são chamadas *funções harmónicas*.

I — *Distribuição estacionária da temperatura num corpo homogéneo*. Seja um corpo homogéneo Ω limitado por uma superfície σ. Mostramos no § 5 que a temperatura em diversos pontos do corpo verifica a equação (8):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Se o processo for estacionário, isto é, se a temperatura não depender do tempo, mas ùnicamente das coordenadas dos pontos do corpo, então, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ e, por conseguinte, a temperatura verifica a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Para que a temperatura do corpo seja determinada unìvocamente a partir desta equação é preciso conhecer a temperatura sobre a superfície σ. Formula-se, então, da maneira seguinte o problema de limites para a equação (1).

Determinar uma função $u(x, y, z)$ que verifica a equação (1) no interior do volume Ω e tomando em cada ponto M da superfície σ os valores dados:

$$u|_\sigma = \psi(M). \tag{2}$$

Este problema é chamado *problema de Dirichlet* ou *primeiro problema de limites* para a equação (1).

Se sobre a superfície do corpo a temperatura não for conhecida, mas se se conhecer o fluxo de calor em cada ponto da superfície que é proporcional a $\frac{\partial u}{\partial n}$ (ver § 5) ter-se-á sobre a superfície σ, em vez da condição inicial (2), a condição

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\sigma = \psi^*(M). \tag{3}$$

O problema da procura da solução da equação (1) que verifica a condição inicial (3) é *chamado problema de Neumann* ou *segundo problema de limites*.

Se se considerar a distribuição da temperatura sobre o domínio plano D, limitado pelo contorno C, a função u dependerá de duas variáveis x e y e verificará a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

que se chama equação da Laplace para o plano. As condições iniciais (2) ou (3) devem ser verificadas sobre o contorno C.

II — *Fluxo potencial dum líquido ou de um gás. Equação de continuidade.* Suponhamos que no interior do volume Ω, limitado pela superfície σ (particularmente Ω pode ser ilimitado) se produz o escoamento dum líquido. Seja ρ a densidade do líquido. Designemos a velocidade do líquido por

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}, \tag{5}$$

em que v_x, v_y, v_z são as projecções do vector v sobre os eixos de coordenadas. Isolemos no corpo Ω um pequeno volume ω, limitado pela superfície S. Para cada elemento Δs da superfície S no decurso do tempo Δt passa uma quantidade de líquido

$$\Delta Q = \rho \boldsymbol{vn}\, \Delta s\, \Delta t,$$

em que $\boldsymbol{n}$ é o vector unidade orientado segundo a normal exterior à superfície S. A quantidade total do líquido Q que penetra no volume ω (ou que se escoa do volume ω) exprime-se pelo integral

$$Q = \Delta t \iint_S \rho \boldsymbol{vn}\, ds \tag{6}$$

(ver §§ 5 e 6, cap. XV). A quantidade de líquido no volume ω no instante t era

$$\iiint_{\omega} \rho \, d\omega.$$

No decurso do tempo Δt a quantidade de líquido variará, em consequência da variação da densidade, duma grandeza

$$Q = \iiint_{\omega} \Delta\rho \, d\omega \approx \Delta t \iiint_{\omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\omega. \tag{7}$$

Supondo que o volume ω não está ligado a fontes, concluímos que esta variação é devida a um afluxo de líquido cupa quantidade é determinada pela igualdade (6). Igualando os segundos membros das igualdades (6) e (7) e simplificando por Δt, obtemos:

$$-\iint_{S} \rho \boldsymbol{vn} \, ds = + \iiint_{\omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\omega. \tag{8}$$

Transformemos o integral duplo do primeiro membro segundo a fórmula de Ostrogradsky (§ 8, cap. XV). A igualdade (8) torna-se, então:

$$-\iiint_{\omega} \operatorname{div} (\rho \boldsymbol{v}) \, d\omega = \iiint_{\omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\omega$$

ou

$$\iiint_{\omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \boldsymbol{v}) \right) d\omega = 0.$$

Sendo o volume tomado arbitràriamente e sendo a função sob o sinal de integração contínua, temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{9}$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0. \tag{9'}$$

É a *equação de continuidade de escoamento dum fluído compressível.*

Nota — Em certos problemas, por exemplo, quando se faz o estudo do escoamento do petróleo ou dos gases através dum terreno poroso para o poço, pode-se adoptar

$$\boldsymbol{v} = -\frac{k}{\rho} \operatorname{grad} p,$$

em que p é a pressão, k o coeficiente de permeabilidade e

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx \lambda \frac{\partial p}{\partial t},$$

$\lambda =$ const. Substituindo na equação de continuidade (9), teremos:

$$\lambda \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} p) = 0$$

ou

$$\lambda \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial p}{\partial z}\right). \qquad (10)$$

Se k é constante, esta equação toma a forma:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right), \qquad (11)$$

e encontramos a equação do calor.

Voltemos à equação (9). Se o fluído é incompressível, $\rho =$ const, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ e a equação (9) escreve-se:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = 0. \qquad (12)$$

Se o movimento é potencial, isto é, se o vector $\boldsymbol{v}$ é o gradiente duma certa função φ:

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi,$$

a equação (12) toma a forma:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \qquad (13)$$

por outras palavras, a função potencial da velocidade φ deve verificar a equação da Laplace.

Em numerosos problemas, como por exemplo, nos problemas de filtração, pode-se adoptar

$$\boldsymbol{v} = -k_1 \operatorname{grad} p,$$

em que p é a pressão, k_1 uma constante; obtemos, então, a equação de Laplace para determinar a pressão

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \tag{13'}$$

As condições iniciais para a equação (13) ou (13′) podem ser formadas da maneira seguinte:

1. Dá-se sobre a superfície σ os valores da função procurada p que é a pressão (condição (2)). É o problema de Dirichlet.

2. Dá-se sobre a superfície σ os valores da derivada normal $\frac{\partial p}{\partial n}$, por outras palavras, o fluxo que atravessa a superfície (condição (3)). É o problema de Neumann.

3. Dá-se sobre uma porção da superfície σ os valores da função procurada p (a pressão) e sobre uma porção da superfície os valores da derivada normal (o fluxo através da superfície). É o problema de Dirichlet-Neumann.

Se o movimento é plano-paralelo, isto é, se a função φ (ou p) não depender de z, obtém-se a equação de Laplace no domínio a duas dimensões D de fronteira C:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{14}$$

As condições iniciais do tipo (2), problema de Dirichet, ou do tipo (3), problema de Neumann, são dadas sobre o contorno C.

III — *Potencial duma corrente eléctrica estacionária.* Suponhamos que num meio homogéneo que preenche um certo volume V passa uma corrente eléctrica cuja densidade em cada ponto é dada pelo vector $\boldsymbol{J}(x, y, z) = J_x\boldsymbol{i} + J_y\boldsymbol{j} + J_z\boldsymbol{k}$. Suponhamos que a densidade da corrente não depende do tempo t. Suponhamos, ainda, que o volume V considerado não contém fonte de corrente. Por conseguinte, o fluxo do vector $\boldsymbol{J}$ através da superfície fechada S situada no interior do volume V é igual a zero:

$$\iint_S \boldsymbol{J}\boldsymbol{n}\, ds = 0,$$

em que $\boldsymbol{n}$ é o vector unidade dirigido, segundo a normal exterior, à superfície.

Com base na fórmula de Ostrogradsky podemos concluir que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{J} = 0. \tag{15}$$

A lei de Ohm generalizada permite determinar no meio condutor considerado, a força eléctrica $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{J}}{\lambda} \tag{16}$$

ou

$$\boldsymbol{J}=\lambda \boldsymbol{E},$$

em que λ é a permeabilidade do meio que consideramos constante.

Resulta das equações gerais do campo que se o processo for estacionário, o campo vectorial $\boldsymbol{E}$ é irrotacional, isto é, que rot $\boldsymbol{E}=0$. Então, do mesmo que no caso do estudo do campo das velocidades dum líquido, o campo vectorial é um campo potencial (ver § 9, cap. XV). Existe uma função φ tal que

$$\boldsymbol{E}=\operatorname{grad} \varphi. \tag{17}$$

Em virtude de (16), obtemos:

$$\boldsymbol{J}=\lambda \operatorname{grad} \varphi. \tag{18}$$

Resulta de (15) e (18):

$$\lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi)=0$$

ou

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=0. \tag{19}$$

Obtivemos a equação de Laplace. Resolvendo esta equação para as condições iniciais correspondentes, obtemos a função φ e, segundo as fórmulas (18) e (17), obtemos a corrente $\boldsymbol{J}$ e a força eléctrica $\boldsymbol{E}$.

§ 9. Equação de Laplace em coordenadas cilíndricas. Resolução do problema de Dirichlet para um arco com valores constantes da função procurada sobre os círculos interior e exterior

Seja $u(x, y, z)$ uma função harmónica de três variáveis. Então, por definição,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{1}$$

Introduzamos as coordenadas cilíndricas (r, φ, z):

$$x=r \cos \varphi, \quad y=r \operatorname{sen} \varphi, \quad z=z$$

donde,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \text{arc tg} \frac{y}{x}, \quad z = z. \tag{2}$$

Substituindo as variáveis independentes x, y, z por r, φ e z obtemos uma função u^*:

$$u(x, y, z) = u^*(r, \varphi, z).$$

Encontremos a equação que deve satisfazer $u^*(r, \varphi, z)$ como função das variáveis, r, φ e z. Temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u^*}{\partial r\,\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \tag{3}$$

duma maneira análoga

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u^*}{dr^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u^*}{\partial r\,\partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \tag{4}$$

alem disso,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}. \tag{5}$$

Encontramos as expressões para

$$\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

a partir da igualdade (2). Fazendo a soma dos segundos membros das igualdades (3), (4) e (5) e igualando o resultado a zero (visto que a soma dos primeiros membros destas igualdades é nulo em virtude de (1)), obtemos:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} = 0. \tag{6}$$

É a *equação de Laplace em coordenadas cilíndricas.*

Se a função u não depender de z e depender de x e y, a função u^* que não depende a não ser de r e φ verifica a equação

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{7}$$

em que r e φ são as coordenadas polares para o plano.

Achemos agora a solução da equação de Laplace no domínio D (arco) limitado pelos círculos $C_1: x^2 + y^2 = R_1^2$ e $C_2: x^2 + y^2 = R_2^2$ que tomam os valores limites seguintes:

$$u\,|_{C_1} = u_1, \tag{8}$$

$$u\,|_{C_2} = u_2, \tag{9}$$

em que u_1 e u_2 são constantes.

Resolveremos o problema em coordenadas polares. É evidente que é lógico procurar uma solução que não dependa de φ.

A equação (7) toma, então, a forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

Integrando esta equação, obtemos:

$$u = C_1 \operatorname{Log} r + C_2. \tag{10}$$

Determinemos C_1 e C_2 das condições (8) e (9):

$$u_1 = C_1 \operatorname{Log} R_1 + C_2,$$

$$u_2 = C_1 \operatorname{Log} R_2 + C_2.$$

Daí tiramos

$$C_1 = \frac{u_2 - u_1}{\operatorname{Log} \frac{R_2}{R_1}}, \quad C_2 = u_1 - (u_2 - u_1)\frac{\operatorname{Log} R_1}{\operatorname{Log} \frac{R_2}{R_1}}.$$

Substituindo os valores achados de C_1 e C_2 na fórmula (10), obtemos, finalmente:

$$u = u_1 + \frac{\operatorname{Log} \frac{r}{R_1}}{\operatorname{Log} \frac{R_2}{R_1}}(u_2 - u_1). \tag{11}$$

Nota — De facto, resolvemos o problema seguinte: determinar uma função u que satisfaça à equação de Laplace no domínio limitado pelas superfícies (em coordenadas cilíndricas):

$$r = R_1, \quad r = R_2, \quad z = 0, \quad z = H,$$

e que verificam as condições dos limites seguintes:

$$u|_{r=R_1} = u_1, \qquad u|_{r=R_2} = u_2,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=H} = 0$$

(problema de Dirichlet-Neumann). É evidente que a solução procurada não depende nem de z, nem de φ e é dada pela fórmula (11).

§ 10. Resolução do problema de Dirichlet para o círculo

Seja no plano Oxy um círculo de raio R, de centro na origem das coordenadas e uma função $f(\varphi)$ dada sobre esse círculo (φ é o ângulo polar). Pede-se para determinar uma função $u(r, \varphi)$ contínua no círculo (inclusivé sobre a fronteira), que verifica no interior do círculo a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

e adoptando sobre a circunferência do círculo os vectores dados

$$u|_{r=R} = f(\varphi). \tag{2}$$

Resolveremos o problema em coordenadas polares. Escrevamos a equação (1) nestas coordenadas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

ou

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{1'}$$

Procuraremos a solução pelo método de separação das variáveis fazendo

$$u = \Phi(\varphi)\, R(r). \tag{3}$$

Substituindo na equação (1') ,obtemos:

$$r^2\Phi(\varphi)\, R''(r) + r\Phi(\varphi)\, R'(r) + \Phi''(\varphi)\, R(r) = 0$$

ou

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -k^2 \tag{4}$$

Como o primeiro membro desta equação não depende de r, e o segundo membro de φ, eles são, por conseguinte, iguais a um número constante que designaremos por $-k^2$. Assim a igualdade (4) dá duas equações:

$$\Phi''(\varphi) + k^2\Phi(\varphi) = 0, \tag{5}$$

$$r^2R''(r) + rR'(r) - k^2R(r) = 0. \tag{5'}$$

A solução geral da equação (5) será

$$\Phi = A\cos k\varphi + B\operatorname{sen} k\varphi \tag{6}$$

Procuraremos a solução da equação (5′) sob a forma $R(r) = r^m$. Substituindo $R(r) = r^m$ em (5′), obtemos:

$$r^2m(m-1)r^{m-2} + rmr^{m-1} - k^2r^m = 0$$

ou

$$m^2 - k^2 = 0.$$

Podemos escrever duas soluções particulares linearmente independentes r^k e r^{-k} A solução geral da equação (5′) será

$$R = Cr^k + Dr^{-k} \tag{7}$$

Substituindo as expressões (6) e (7) em (3):

$$u_k = (A_k\cos k\varphi + B_k\operatorname{sen} k\varphi)(C_kr^k + D_kr^{-k}). \tag{8}$$

A função (8) será a solução da equação (1′) para todo o valor de k, diferente de zero. Se $k = 0$ as equações (5) e (5′) escrevem-se

$$\Phi'' = 0, \qquad rR''(r) + R'(r) = 0,$$

e, por conseguinte,

$$u_0 = (A_0 + B_0\varphi)(C_0 + D_0\operatorname{Log} r) \tag{8'}$$

A solução deve ser uma função periódica de φ, visto que para um mesmo valor r para φ e $\varphi + 2\pi$ devemos chegar à mesma solução; trata-se, com efeito, dum mesmo ponto do círculo. Eis porque é evidente que na fórmula (8′) seja preciso que $B_0 = 0$. Procuraremos a solução contínua e finita no círculo Por conseguinte no centro do círculo para $r = 0$ a solução deve ser finita, e por consequência é preciso que na fórmula (8′) $D_0 = 0$ e na fórmula (8) $D_k = 0$

Assim, o segundo membro de (8′) reduz-se ao produto A_0C_0 que designaremos por $A_0/2$. Assim

$$u_0 = \frac{A_0}{2}. \tag{8''}$$

Procuraremos a solução do nosso problema sob a forma de soma das soluções do tipo (8), visto que a soma das soluções é uma solução. A soma deve ser uma função periódica de φ. Se-lo-á também se cada termo da soma for uma função periódica de φ. Para isso k deve tomar valores inteiros. (Notemos que se tivessemos igualado os membros da igualdade (4) ao número $+k^2$, não teríamos obtido uma solução periódica). Podemos limitar-nos aos valores positivos

$$k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots,$$

visto que, as constantes A, B, C, D sendo arbitrárias, os valores negativos de k não dão novas soluções particulares.

Assim

$$u(r,\ \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \operatorname{sen} n\varphi)\, r^n \tag{9}$$

(a constante C_n está inclusa em A_n e B_n). Escolhamos, agora, as constantes arbitrárias A_n e B_n de maneira que sejam verificadas as condições iniciais (2).

Substituindo na igualdade (9) $r = R$, obtemos em virtude da condição (2):

$$f(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \operatorname{sen} n\varphi)\, R^n \tag{10}$$

Para que tenha lugar a igualdade (10) é preciso que a função admita um desenvolvimento em série de Fournier no intervalo $(-\pi,\ \pi)$ e que A_nR^n e B_nR^n sejam os seus coeficientes de Fourier. Por conseguinte, A_n e B_n são determinados, segundo as fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt, \\ B_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Assim, a série (9) com os coeficientes determinados, segundo as fórmulas (11), será a solução do nosso problema se ela puder ser duas vezes derivada termo a termo em ordem a r e a φ (mas isso não foi demonstrado). Transformemos a fórmula (9). Substituindo A_n e B_n pelas suas expressões (11) e efectuando certas transformações trigonométricas, obtemos:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(t-\varphi)\, dt \left(\frac{r}{R}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t-\varphi)\right] dt \qquad (12)$$

Transformemos a expressão que figura entre parêntesis (*):

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t-\varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n [e^{in(t-\varphi)} + e^{-in(t-\varphi)}] =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{r}{R} e^{i(t-\varphi)}\right)^n + \left(\frac{r}{R} e^{-i(t-\varphi)}\right)^n\right] =$$

$$= 1 + \frac{\frac{r}{R} e^{i(t-\varphi)}}{1 - \frac{r}{R} e^{i(t-\varphi)}} + \frac{\frac{r}{R} e^{-i(t-\varphi)}}{1 - \frac{r}{R} e^{-i(t-\varphi)}} =$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}{1 - 2\frac{r}{R}\cos(t-\varphi) + \left(\frac{r}{R}\right)^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} \qquad (13)$$

(*) Durante a demonstração determinamos a soma duma progressão geométrica infinita, cuja razão é um número complexo de módulo inferior à unidade. Esta fórmula da soma duma progressão geométrica pode ser estabelecida da mesma maneira que para os números reais. É necessário, no entanto, ter em conta a definição de limite duma função complexa da variável real. A variável independente é aqui n (ver § 4, cap. VII, t. I).

Substituindo a expressão que figura entre parêntesis na fórmula (12) pela expressão (13), obtemos:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(t - \varphi) + r^2} dt. \tag{14}$$

A fórmula (14) chama-se *integral de Poisson*. Demonstra-se, analisando esta fórmula, que se a função $f(\varphi)$ for contínua, a função $u(r, \varphi)$ definida pelo integral (14) verifica a equação (1') e quando $r \to R$ teremos $u(r, \varphi) \to f(\varphi)$, por outras palavras $u(r, \varphi)$ é a solução do problema de Dirichlet que apresentamos para o círculo.

§ 11. Solução do problema de Dirichlet pelo método das diferenças finitas

Seja um domínio D no plano Oxy limitado pelo contorno C. Seja dada sobre o contorno C uma função contínua f. Pede-se para determinar a solução aproximada da equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

que verifica a condição dos limites

$$u|_C = f. \tag{2}$$

Tracemos duas famílias de curvas

$$x = ih \quad \text{et} \quad y = kh, \tag{3}$$

em que h é um número dado, tomando i e k sucessivamente valores inteiros. Diremos que o domínio D está recoberto por *uma grade* (quadrícula). Os pontos de intersecção das diferentes rectas serão chamados *nós da grade.*

Designemos o valor aproximado da função procurada no ponto $x = ih$, $y = kh$ por $u_{i,k}$, isto é, $u(ih, kh) = u_{i,k}$. Assemelhamos o domínio D ao domínio da grade D^* constituído pelo conjunto dos quadrados contidos inteiramente no domínio D, assim como alguns quadrados cortando a fronteira C (pode-se não ter isso em conta). Assemelha-se o contorno C ao contorno C^* constituído por segmentos de recta do tipo (3). Em cada nó situado sobre o contorno C^* demos o valor f^* igual ao valor da função f correspondente ao ponto mais próximo do contorno C (fig. 377).

Não consideramos os valores da função procurada a não ser para os nós da grade. Como já indicámos no § 6, por ocasião da

resolução pelo método aproximado, as derivadas são substituídas pelas diferenças finitas:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=ih,\ y=kh} = \frac{u_{i+1,\,k} - 2u_{i,\,k} + u_{i-1,\,k}}{h^2},$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{x=ih,\ y=kh} = \frac{u_{i,\,k+1} - 2u_{i,\,k} + u_{i,\,k-1}}{h^2}.$$

A equação diferencial (1) é substituída pela *equação das diferenças finitas* (depois da simplificação por h^2):

$$u_{i+1,\,k} - 2u_{i,\,k} + u_{i-1,\,k} + u_{i,\,k+1} - 2u_{i,\,k} + u_{i,\,k-1} = 0$$

ou (fig. 378)

$$u_{i,\,k} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,\,k} + u_{i,\,k+1} + u_{i-1,\,k} + u_{i,\,k-1}\right). \tag{4}$$

Para cada nó da grade situado no interior do domínio D^* (e não situado sobre a fronteira de C^*) componhamos a equação (4).

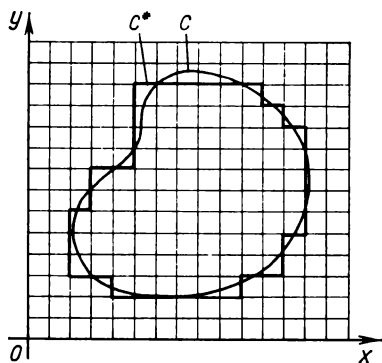



Fig. 377

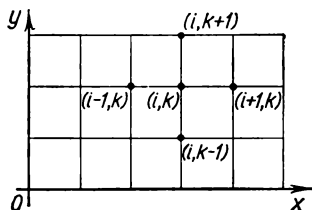



Fig. 378

Se o ponto ($x = ih$, $y = kh$) for vizinho do ponto do contorno C^*, no segundo membro da igualdade (4) teremos os valores de f^*. Obtemos, assim, um sistema não homogéneo de N equações a N incógnitas (N é o número de nós da grelha situados no interior do domínio D^*).

Demonstremos que o sistema (4) possui uma solução que é única. É o sistema de N equações lineares a N incógnitas. Ele possui uma solução única no caso em que o determinante do sistema for diferente de zero. O determinante do sistema é diferente de zero se o sistema homogéneo apenas tiver uma solução trivial (nula).

O sistema será homogénéo se $f^* = 0$ para os nós da grade situados sobre o contorno C^*. Demonstraremos que neste caso todos os valores $u_{i,\,k}$ para todos os nós interiores da grade são nulos. Suponhamos que no interior do domínio existe $u_{i,\,k}$ diferentes de zero. Para fixar ideias, suponhamos que o maior valor desses valores é positivo. Designemo-lo por $\bar{u}_{i,\,k} > 0$.

Em virtude da fórmula (4) escrevemos:

$$\bar{u}_{i,\,k} = \frac{1}{4}(u_{i+1,\,k} + u_{i,\,k+1} + u_{i-1,\,k} + u_{i,\,k-1}). \qquad (4')$$

Esta igualdade apenas é verificada para o caso em que todos os valores u do segundo membro são iguais ao maior valor $\bar{u}_{i,\,k}$. Temos assim cinco pontos para os quais o valor da função procurada é $\bar{u}_{i,\,k}$. Se nenhum destes pontos estiver sobre a fronteira, demonstraremos tomando um de entre eles e escrevendo para ele a igualdade (4) que noutros pontos o valor da função desconhecida será também igual a $\bar{u}_{i,\,k}$. Prosseguindo assim atingiremos a fronteira e demonstraremos que para um ponto da fronteira o valor da função é igual a $\bar{u}_{i,\,k}$. Mas isso contradiz o facto de que nos pontos da fronteira $f^* = 0$.

Supondo agora que no interior do domínio temos um valor negativo mínimo demonstraremos da mesma maneira que sobre a fronteira o valor da função é negativo, o que contradiz também a condição apresentada.

Assim o sistema (4) possui uma solução que é única.

Os valores de $u_{i,\,k}$ determinados a partir do sistema (4) *constituem os valores aproximados da solução do problema de Dirichlet formulado anteriormente.* Estabeleceu-se que se a solução do problema de Dirichlet para um dado domínio D e uma dada função f existe (designemo-la por $u(x, y)$) e se $u_{i,\,k}$ for a solução do sistema (4), teremos, então, a relação

$$|u(x, y) - u_{i,\,k}| < Ah^2, \qquad (5)$$

em que A é uma constante independente de h.

Nota — É por vezes possível, embora isso não esteja demonstrado rigorosamente, utilizar o processo seguinte para avaliar o erro da solução aproximada. Seja $u_{i,k}^{(2h)}$ a solução aproximada para um passo igual a $2h$, $u_{i,k}^{(h)}$ a solução aproximada para um passo igual a h, $E_h(x, y)$ o erro da solução $u_{i,k}^{(h)}$. Então, temos a igualdade aproximada

$$E_h(x, y) \approx \frac{1}{3}(u_{i,\,k}^{(2h)} - u_{i,\,k}^{(h)})$$

nos nós comuns das grades. Assim, para determinar o erro da solução aproximada para um passo h, é preciso determinar a solução para um passo $2h$. A terça parte da diferença destas soluções aproximadas é precisamente a avaliação do erro da solução para o passo h. Esta nota pode respeitar igualmente à resolução da equação do calor pelo método das diferenças finitas.

Exercícios

1. Estabelecer a equação das vibrações de torção duma barra homogénea cilíndrica.

Indicação — O momento giratório na secção da barra de abcissa x é determinada pela fórmula $M = GI\frac{\partial\theta}{\partial x}$, em que $\theta(x, t)$ é o ângulo de torção da secção da abcissa x no momento t, G o módulo de deslize, I o momento de inércia polar da secção transversal da barra.

Resp. $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$, em que $a^2 = \frac{GI}{k}$, k é o momento de inércia da unidade de comprimento da barra.

2. Determinar a solução da equação $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$, que verifica as condições

$\theta(0, t) = 0$, $\theta(l, t) = 0$, $\theta(x, 0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial\theta(x, 0)}{\partial t} = 0$, em que

$$\varphi(x) = \frac{2\theta_0 x}{l} \text{ para } 0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2},$$

$$\varphi(x) = -\frac{2\theta_0 x}{l} + 2\theta_0 \text{ para } \frac{l}{2} \leqslant x \leqslant l.$$

Dar uma interpretação mecânica do problema. Resp. $\theta(x, t) =$

$$= \frac{8\theta_0}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi x}{l}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{l}.$$

3. Estabelecer a equação das oscilações longitudinais duma barra cilíndrica homogénea.

Indicação — Se $u(x, t)$ designar a deslocação da secção do cilindro de abcissa x no momento t, a contracção de tracção T da secção x é determinada pela fórmula $T = ES\frac{\partial u}{\partial x}$, em que E é o módulo de elasticidade do material, S a superfície da secção transverçal da barra.

Resp. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, em que $a^2 = \frac{E}{\rho}$, ρ a densidade do material da barra.

4. Uma barra homogénea de comprimento $2l$ sob a acção das forças aplicadas às suas extremidades curvou-se duma grandeza 2λ. No instante $t = 0$ liberta-se-la da acção das forças exteriores que lhe foram aplicadas. Deter-

minar o afastamento $u(x, t)$ da secção da barra de abcissa x no instante t (o meio do eixo da barra está situado no ponto de abcissa $x = 0$).

Resp. $u(x, t) = \frac{8\lambda}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2k+1)\pi a t}{2l}$.

5. Uma barra de comprimento l está fixa por uma das suas extremidades e sobre a outra age uma força de extensão P. Determinar as oscilações longitudinais da barra se para $t = 0$ a força P não agir.

Resp. $\frac{8Pl}{ES\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2l}$

(ver o problema 3 para o sentido de E e S).

6. Determinar a solução da equação $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ que satisfaz às condições

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = A \operatorname{sen} \omega t, \; u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Dar uma interpretação mecânica do problema.

Resp. $u(x, t) = \frac{A \operatorname{sen} \frac{\omega}{a} x \operatorname{sen} \omega t}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{a} l} +$

$$+ \frac{2A\omega a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\omega^2 - \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi a t}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}.$$

Indicação — Procurar a solução sob a forma de soma de duas soluções:

$$u = v + w, \text{ où } w = \frac{A \operatorname{sen} \frac{\omega}{a} x \operatorname{sen} \omega t}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{a} l}$$

é a solução que verifica as condições:

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \quad v(x, 0) = -w(x, 0), \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = -\frac{\partial w(x, 0)}{\partial t}.$$

$\left(\text{Supõe-se que sen } \frac{\omega}{a} l \neq 0. \right)$

7. Determinar a solução da equação $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, que verifica as condições:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \; t > 0, u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}, \\ l - x & \text{para } \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

Resp. $h(x, t) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2 t}{l^2}} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{l}$

Indicação — Resolver o problema pelo método de separação das variáveis.

8. Determinar a solução da equação $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, que verifica as condições:

$$u(0, t) = u(0, l) = 0, \quad u(x, 0) = \frac{x(l-x)}{l^2}$$

Resp. $u(x, t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2 t}{l^2}} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{l}$

9. Determinar a solução da equação $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, que verifica as condições:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad u(l, t) = u_0, \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

Indicar o sentido físico do problema.

Resp. $u(x, t) = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} x,$

em que $A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx - \frac{(-1)^n 4u_0}{\pi(2n+1)}$.

Indicação — Procurar a solução sob a forma $u = u_0 + v(x, t)$.

10. Determinar a solução da equação $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, que verifica as condições:

$$u(0, t) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = -Hu\,|_{x=l}, \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

Indicar o sentido físico do problema.

Resp. $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{p^2 + \mu_n^2}{p(p+1) + \mu_n^2} e^{-\frac{\mu_n^2 a^2 t^2}{l^2}} \operatorname{sen} \frac{\mu_n x}{l},$

em que $A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen} \frac{\mu_n x}{l} dx$, $p = Hl$, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ são as raízes positivas da equação $\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{p}$.

Indicação — Na extremidade $x = l$ da barra produz-se uma troca de calor com o meio ambiente, em que a temperatura é igual a zero.

11. Determinar (segundo a fórmula (10) do § 6 fazendo $h = 0{,}2$), a solução aproximada da equação $\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, que verifica as condições:

$$u(x,\ 0) = x\left(\frac{3}{2} - x\right),\quad u(0,\ t) = 0,\quad u(1,\ t) = \frac{1}{2},\quad 0 \leqslant t \leqslant 4l.$$

12. Determinar a solução da equação de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ na zona $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y < \infty$, que verifica as condições:

$$u(0,\ y) = 0,\quad u(a,\ y) = 0,\quad u(x,\ 0) = A\left(1 - \frac{x}{a}\right),\quad u(x,\ \infty) = 0.$$

Resp. $u(x,\ t) = \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{a}y}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}$.

Indicação — Determinar a solução pelo método de separação das variáveis.

13. Achar a solução da equação de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ no rectângulo $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$, que verifica as condições:

$$u(x,\ 0) = 0,\quad u(x,\ b) = 0,\quad u(0,\ y) = Ay(b - y),$$
$$u(a,\ y) = 0.$$

Resp. $u(x,\ t) = \frac{8Ab^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi(a-x)}{b}}{(2n+1)^3}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi y}{b}}{\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi a}{b}}$.

14. Determinar a solução da equação $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ no interior do anel limitado pelos círculos $x^2 + y^2 = R_1^2$, $x^2 + y^2 = R_2^2$, que verifica as condições:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_1} = +\frac{Q}{\lambda 2\pi R_1},\quad u\big|_{r=R_2} = u_2.$$

Dar uma interpretação hidrodinâmica do problema.

Indicação — Resolver o problema em coordenadas polares.

Resp. $u = u_2 - \frac{Q}{2\lambda\pi}\operatorname{Log}\frac{R_2}{r}$.

15. A função $u(x,\ y) = e^{-y}\operatorname{sen} x$ é a solução da equação $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ no quadrado $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$, que verifica as condições:

$$u(0,\ y) = 0,\quad u(1,\ y) = e^{-y}\operatorname{sen} 1,\quad u(x,\ 0) = \operatorname{sen} x,\quad u(x,\ 1) = e^{-1}\operatorname{sen} x.$$

16. Nos problemas 12-15 resolver a equação de Laplace para condições dos limites dados pelo método das diferenças finitas no caso de $h = 0{,}25$. Comparar a solução aproximada com a solução exacta.

Capítulo XIX

CÁLCULO OPERACIONAL E APLICAÇÕES

Na hora actual, o cálculo operacional (ou simbólico), é um dos domínios importantes da análise matemática. Em física, em mecânica, em electrotécnica e noutros ramos da ciência utiliza-se os métodos do cálculo operacional para a resolução de diferentes problemas. O cálculo operacional encontrou uma aplicação particularmente larga na tecnologia moderna da automação e das telecomunicações. Neste capítulo (com base na matéria dos capítulos precedentes) serão precisamente expostas as noções fundamentais do cálculo operacional bem como os métodos da sua aplicação à resolução das equações diferenciais ordinárias.

§ 1. Original e imagem

Seja dada uma função da variável real t definida para $t \geqslant 0$ (por vezes consideraremos que a função $f(t)$ está definida num intervalo infinito $-\infty < t < \infty$, mas $f(t) = 0$ quando $t < 0$). Suporemos que a função $f(t)$ é contínua por corte, isto é, tal que, em cada intervalo finito, ela possui um número finito de descontinuidades de primeira espécie (ver § 9, cap. II, t. I). Para assegurar a existência de certos integrais no intervalo infinito $0 \leqslant t < \infty$ imporemos à função $f(t)$ restrições complementares. Suporemos precisamente que existem números positivos constantes M e s_0 tais que

$$|f(t| < Me^{s_0 t} \tag{1}$$

para todo o valor arbitrário de t tomado no intervalo $0 \leqslant t < \infty$.

Consideremos o produto da função $f(t)$ pela função complexa $^{-pt}$ da variável real (*) t, em que $p = a + ib$ $(a > 0)$ é um número complexo:

$$e^{-pt} f(t). \tag{2}$$

(*) A respeito das funções complexas da variável real, ver § 4, cap. VII, t. I.

A função (2) é também uma função complexa da variável real t:

$$e^{-pt}f(t) = e^{-(a+ib)t}f(t) = e^{-at}f(t)\,e^{-ibt} =$$
$$= e^{-at}f(t)\cos bt - ie^{-at}f(t)\,\text{sen}\,bt.$$

Considerereremos em seguida o integral impróprio

$$\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-at}f(t)\cos bt\,dt - i\int_0^\infty e^{-at}f(t)\,\text{sen}\,bt\,dt. \qquad (3)$$

Mostremos que se a função $f(t)$ verifica a condição (1) e $a > s_0$, então, os integrais do segundo membro da igualdade (3) existem e a convergência desses integrais é absoluta. Consideremos, primeiramente, o primeiro destes integrais:

$$\left|\int_0^\infty e^{-at}f(t)\cos bt\,dt\right| \leqslant \int_0^\infty \left|e^{-at}f(t)\cos bt\right| dt <$$
$$< M\int_0^\infty e^{-at}e^{s_0t}\,dt = M\int_0^\infty e^{-(a-s_0)t}\,dt = \frac{M}{a-s_0}.$$

Estima-se da mesma maneira o segundo integral. Assim o integral $\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$ existe. Ele define uma certa função de p, que designaremos (*) por $F(p)$:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt. \qquad (4)$$

A função $F(p)$ chama-se *transformada de Laplace* ou *imagem L* ou simplesmente *imagem de* $f(t)$. A função $f(t)$ chama-se *original* ou *função objecto*. O facto de $F(p)$ ser a imagem da função $f(t)$ é assim notada:

$$F(p) \stackrel{\cdot}{\rightarrow} f(t), \qquad (5)$$

ou

$$f(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} F(p), \qquad (6)$$

ou

$$L\{f(t)\} = F(p). \qquad (7)^{**})$$

(*) A função $F(p)$ para $p \neq 0$ é uma função da variável complexa (ver entre outros o livro traduzido do russo de V. Smionov «Curso de Matemáticas Superiores», vol. III, segunda parte).

(**) Utiliza-se também outros símbolos de correspondências. É assim que em vez da notação $\stackrel{\cdot}{\leftarrow}$ se emprega também o símbolo $\sqsupset$ e escreve-se no caso da fórmula (6) $f(t) \sqsupset F(p)$ (*N.d.T.*).

Como veremos em seguida o sentido da introdução das imagens reside no facto de que elas permitem simplificar a resolução de numerosos problemas, em particular de reduzir a resolução das equações diferenciais ordinárias a certas operações algébricas simples que permitem determinar a função imagem. Conhecendo a imagem pode-se determinar o original quer por meio das tábuas prèviamente compostas «original-imagem» (dicionário de imagens) quer pelos métodos que exporemos mais à frente. Perguntas se põem, então, naturalmente.

Seja dada uma certa função $F(p)$. Existe uma função $f(t)$ em que $F(p)$ é a imagem? Se ela existe, é única? As duas perguntas recebem uma resposta positiva se $F(p)$ e $f(t)$ satisfizerem certas condições. Em particular a unicidade da imagem é estabelecida pelo teorema seguinte que enunciaremos sem demonstração.

Teorema da unicidade — *Se duas funções contínuas $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ possuem uma mesma imagem $L\,F(p)$ essas funções são idênticamente* iguais.

Este teorema será duma grande utilidade para tudo o que se seguirá. Com efeito se na resolução dum problema prático pudermos determinar a imagem da função procurada, e em seguida obtivermos o original segundo a sua imagem, podemos concluir em virtude do teorema formulado que a função obtida é a solução do problema posto, e que não existem outras soluções.

§ 2. Imagens das funções $\sigma_0(t)$, sen t, cos t

I — A função $f(t)$ assim determinada

$$f(t) = 1 \text{ para } t \geqslant 0,$$
$$f(t) = 0 \text{ para } t < 0$$

chama-se *função unidade de Heaviside* e representa-se por $\sigma_0(t)$. O gráfico desta função está representado na figura 379. Obtemos a imagem L da função de Heaviside:

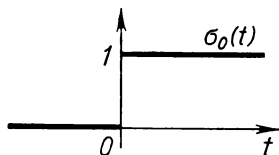



Fig. 379

$$L\{\sigma_0(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt = -\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

Assim (*)

$$1 \doteqdot \frac{1}{p} \tag{8}$$

ou, mais exactamente,

$$\sigma_0(t) \doteqdot \frac{1}{p}.$$

Em certos tratados de cálculo operacional chama-se imagem da função $f(t)$ à expressão

$$F^*(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Neste caso tem-se : $\sigma_0(t) \doteqdot 1$ e, por conseguinte, $C \doteqdot C$, mais exactamente $C\sigma_0(t) \doteqdot C$.

II — Seja $f(t) = \operatorname{sen} t$; então,

$$L\{\operatorname{sen} t\} = \int_0^\infty e^{-pt} \operatorname{sen} t\,dt = \frac{e^{-pt}(-p \operatorname{sen} t - \cos t)}{p^2+1}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{p^2+1}$$

Assim,

$$\operatorname{sen} t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}. \tag{9}$$

III — Seja $f(t) = \cos t$; então,

$$L\{\cos t\} = \int_0^\infty e^{-pt} \cos t\,dt = \frac{e^{-pt}(\operatorname{sen} t - p\cos t)}{p^2+1}\Bigg|_0^\infty = \frac{p}{p^2+1}.$$

Assim,

$$\cos t \doteqdot \frac{p}{p^2+1}. \tag{10}$$

(*) Na altura do cálculo do integral $\int_0^\infty e^{-pt}\,dt$ poder-se-ia tê-lo representado como a soma dos integrais de funções reais; teríamos obtido o mesmo resultado. Esta nota diz respeito, igualmente aos dois integrais seguintes.

§ 3. Imagens das funções com escala modificada da variável independente. Imagens das funções sen at, cos at

Consideremos a imagem da função $f(at)$, em que $a > 0$:

$$L\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(at)\, dt.$$

Efectuemos uma mudança de variável no segundo integral, fazendo $z = at$; por conseguinte, $dz = a\,dt$; obtemos, então;

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{p}{a}z} f(z)\, dz$$

ou

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Assim, *se*

$$F(p) \to f(t),$$

então,

$$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \to f(at). \tag{11}$$

Exemplo — 1. Obtemos imediatamente da fórmula (9), em virtude de (11):

$$\text{sen}\, at \leftarrow \frac{1}{a} \frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1}$$

ou

$$\text{sen}\, at \leftarrow \frac{a}{p^2 + a^2}. \tag{12}$$

Exemplo — 2. Obtemos da fórmula (10), em virtude de (11):

$$\cos at \leftarrow \frac{1}{a} \frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1}$$

ou

$$\cos at \leftarrow \frac{p}{p^2 + a^2}. \tag{13}$$

§ 4. Propriedade de linearidade da imagem

Teorema — *A imagem da soma de várias funções, multiplicadas por constantes, é igual à soma das imagens destas funções multiplicadas pelas constantes correspondentes, por outras palavras, se*

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t) \tag{14}$$

(C_i são constantes) e

$$F(p) \rightarrow f(t), \qquad F_i(p) \rightarrow f_i(t),$$

então

$$F(p)=\sum_{i=1}^{n} C_i F_i(p). \tag{14'}$$

Demonstração — Multipliquemos todos os termos da igualdade (14) por e^{-pt} e integremos em t nos limites de 0 a ∞ (pondo fora os factores C_i de debaixo do sinal de integração); obtemos a igualdade (14').

Exemplo — 1. Determinar a imagem da função

$$f(t)=3 \text{ sen } 4t-2 \cos 5t.$$

Resolução — Em virtude das fórmulas (12), (13) e (14'), obtemos:

$$L\{f(t)\}=3\frac{4}{p^2+16}-2\frac{p}{p^2+25}=\frac{12}{p^2+16}-\frac{2p}{p^2+25}.$$

Exemplo — 2. Determinar o original cuja imagem é dada pela expressão

$$F(p)=\frac{5}{p^2+4}+\frac{20p}{p^2+9}$$

Resolução — Representemos $F(p)$ da maneira seguinte:

$$F(p)=\frac{5}{2}\,\frac{2}{p^2+(2)^2}+20\frac{p}{p^2+(3)^2}$$

Por conseguinte, em virtude das fórmulas (12), (13) e (14'), obtemos:

$$f(t)=\frac{5}{2} \text{ sen } 2t+20 \cos 3t.$$

Resulta do teorema da unicidade do § 1 que é o único original que corresponde à função dada $F(p)$.

§ 5. Teorema do deslocamento

Teorema — *Se* $F(p)$ *é a imagem da função* $f(t)$, *então,* $F(p+\alpha)$ *é a imagem da função* $e^{-\alpha t} f(t)$, por outras palavras

$$\left.\begin{array}{ll} se & F(p) \to f(t), \\ então, & F(p+\alpha) \to e^{-\alpha t} f(t). \end{array}\right\} \tag{15}$$

(Supomos aqui que $\operatorname{Re}(p+\alpha) > s_0$).

Demonstração — Determinemos a imagem da função $e^{-\alpha t} f(t)$:

$$L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt-\alpha t} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(p+\alpha)t} f(t)\, dt.$$

Assim,

$$L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = F(p+\alpha).$$

O teorema demonstrado alarga, notàvelmente, a classe das imagens para as quais o original pode fàcilmente ser encontrado.

§ 6. Imagem das funções $e^{-\alpha t}$, senh αt, cosh αt, $e^{-\alpha t}$ sen αt, $e^{-\alpha t}$ cos αt

Resulta imediatamente da fórmula (8) em virtude da fórmula (15) que

$$\frac{1}{p+\alpha} \to e^{-\alpha t}. \tag{16}$$

De uma maneira análoga

$$\frac{1}{p-\alpha} \to e^{\alpha t}. \tag{16'}$$

Subtraindo dos termos da relação (16') os termos correspondentes da relação (16) e dividindo as diferenças obtidas por 2, obtemos:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p+\alpha}\right) \to \frac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})$$

ou

$$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2} \to \operatorname{sh} \alpha t. \tag{17}$$

De igual modo fazendo a soma de (16) e de (16'):

$$\frac{p}{p^2 - \alpha^2} \doteq \operatorname{ch} \alpha t. \tag{18}$$

Resulta da fórmula (12), em virtude das fórmulas (15):

$$\frac{a}{(p + \alpha)^2 + a^2} \doteq e^{-\alpha t} \operatorname{sen} at \tag{19}$$

Da fórmula (13), em virtude das fórmulas (15), resulta:

$$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + a^2} \doteq e^{-\alpha t} \cos at \tag{20}$$

Exemplo — 1. Determinar o original cuja imagem é dada pela fórmula

$$F(p) = \frac{7}{p^2 + 10p + 41}$$

Resolução — Transformemos $F(p)$ de maneira a dar-lhe a forma da expressão do primeiro membro da relação (19):

$$\frac{7}{p^2 + 10p + 41} = \frac{7}{(p+5)^2 + 16} = \frac{7}{4} \frac{4}{(p+5)^2 + 4^2}$$

Assim,

$$F(p) = \frac{7}{4} \frac{4}{(p+5)^2 + 4^2}$$

Por conseguinte, em virtude da fórmula (19), teremos:

$$F(p) \doteq \frac{7}{4} e^{-5t} \operatorname{sen} 4t$$

Exemplo — 2. Determinar o original cuja imagem é dada pela fórmula

$$F(p) = \frac{p + 3}{p^2 + 2p + 10}$$

Resolução — Transformemos a função $F(p)$:

$$\frac{p+3}{p^2 + 2p + 10} = \frac{(p+1) + 2}{(p+1)^2 + 9} = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 3^2} + \frac{2}{(p+1)^2 + 3^2} =$$

$$= \frac{p+1}{(p+1)^2 + 3^2} + \frac{2}{3} \frac{3}{(p+1)^2 + 3^2}$$

em virtude das fórmulas (19) e (20), obtemos o original

$$F(p) \doteq e^{-t} \cos 3t + \frac{2}{3} e^{-t} \operatorname{sen} 3t$$

§ 7. Derivação da imagem

Teorema — *Se* $F(p) \dot{\to} f(t)$, *então,*

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) \dot{\to} t^n f(t) \tag{21}$$

Demonstração — Demonstremos, primeiramente, que se $f(t)$ verifica a condição (1), então, o integral

$$\int_0^\infty e^{-pt} (-t)^n f(t)\, dt \tag{22}$$

existe.

Por hipótese $|f(t)| < Me^{s_0 t}$, $p = a + ib$, $a > s_0$; além disso temos $a > 0$ e $s_0 > 0$. É evidente que existe um número $\varepsilon > 0$ que verifica a desigualdade $a > s_0 + \varepsilon$. Do mesmo modo que no § 1 se demonstra a existência do integral

$$\int_0^\infty e^{-(a-\varepsilon)t} |f(t)|\, dt.$$

Calculemos, seguidamente, o integral (22):

$$\int_0^\infty |e^{-pt} t^n f(t)|\, dt = \int_0^\infty |e^{-(a-\varepsilon)t} e^{-\varepsilon t} t^n f(t)|\, dt.$$

Sendo a função $e^{-\varepsilon t}\, t^n$ limitada, e menor em valor absoluto do que um certo número N para todo o valor $t > 0$, pode-se escrever:

$$\int_0^\infty |e^{-pt} t^n f(t)|\, dt < N \int_0^\infty |e^{-(a-\varepsilon)t} f(t)|\, dt = N \int_0^\infty e^{-(a-\varepsilon)t} |f(t)|\, dt < \infty$$

Demonstramos, assim, a existência do integral (22). Ora, este integral pode ser considerado como a derivada de ordem n em ordem ao parâmetro (*) p do integral

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$$

Assim da fórmula

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$$

(*) Estabelecemos no preâmbulo a fórmula de derivação do integral definido em relação a um parâmetro real (ver § 10, cap. XI, t. I). Aqui o parâmetro p é um número complexo, mas a fórmula de derivação permanece válida.

obtemos a fórmula

$$\int_0^\infty e^{-pt}(-t)^n f(t)\,dt = \frac{d^n}{dp^n}\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Estas duas igualdades dão-nos

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t^n f(t),$$

isto é, a fórmula (21).

Utilizemos a fórmula (22) para obter a imagem da função potência. Escrevamos a fórmula (8):

$$\frac{1}{p} \doteqdot 1$$

Obtemos desta fórmula em virtude da fórmula (21):

$$(-1)\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) \doteqdot t$$

ou

$$\frac{1}{p^2} \doteqdot t.$$

De uma maneira análoga

$$\frac{2}{p^3} \doteqdot t^2.$$

Para n qualquer, obtemos:

$$\frac{n!}{p^{n+1}} \doteqdot t^n. \tag{23}$$

Exemplo — 1. Obtemos da fórmula (ver (12)

$$\frac{a}{p^2+a^2} = \int_0^\infty e^{-pt} \operatorname{sen} at\,dt,$$

derivando o primeiro e o segundo membro em relação ao parâmetro p:

$$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2} \doteqdot t \operatorname{sen} at. \tag{24}$$

Exemplo — 2. Obtemos da fórmula (13), em virtude da fórmula (21):

$$-\frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2} \doteqdot t\cos at. \tag{25}$$

Exemplo — 3. Obtemos da fórmula (16), em virtude da fórmula (21):

$$\frac{1}{(p+\alpha)^2} \doteqdot te^{-\alpha t} \tag{26}$$

§ 8. Imagem das derivadas

Teorema — *Se* $F(p) \doteqdot f(t)$, *então,*

$$pF(p) - f(0) \doteqdot f'(t). \tag{27}$$

Demonstração — Em virtude da definição de imagem duma função podemos escrever:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt. \tag{28}$$

Suporemos que todas as derivadas $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$, que encontraremos, satisfazem à condição (1), e, por conseguinte, que o integral (28) e os integrais análogos para as derivadas sucessivas existem. Efectuando a integração por partes do integral do segundo membro da igualdade (28), obtemos:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt = e^{-pt} f(t)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$$

Ora, segundo a condição (1)

$$\lim_{t\to\infty} e^{-pt} f(t) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = F(p)$$

Eis, porque

$$L\{f'(t)\} = -f(0) + pF(p).$$

O teorema está demonstrado. Consideremos, seguidamente, a imagem das derivadas de qualquer ordem. Substituindo na fórmula (27) a expressão $pF(p) - f(0)$ em vez de $F(p)$ e substituindo $f(t)$ por $f'(t)$, obtemos:

$$p[pF(p) - f(0)] - f'(0) \doteqdot f''(t)$$

ou, tirando os parêntesis,

$$p^2 F(p) - pf(0) - f'(0) \doteqdot f''(t). \tag{29}$$

A imagem da derivada de ordem n será

$$p^n F(p) - [p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \ldots$$
$$\ldots + p f^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)] \div\!\!\to f^{(n)}(t). \qquad (30)$$

Nota — As fórmulas (27), (29) e (30) simplificam-se se $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$. Neste caso obtemos:

$$F(p) \div\!\!\to f(t),$$
$$pF(p) \div\!\!\to f'(t),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$p^n F(p) \div\!\!\to f^{(n)}(t).$$

§ 9. Dicionário de imagens

Para facilitar a utilização das imagens obtidas agrupamo-las num quadro.

Nota — Se tomarmos para imagem da função $f(t)$

$$F^*(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt,$$

convém nas fórmulas 1 a 13 do quadro, multiplicar as expressões da primeira coluna por p. Quanto às fórmulas 14 e 15 elas serão da forma: como $F^*(p) = pF(p)$, substituindo na parte esquerda da fórmula 14 $F(p)$ pela expressão $\frac{F^*(p)}{p}$ e multiplicando por p, obtemos:

$$14'. \qquad (-1)^n p \frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{F^*(p)}{p}\right) \div\!\!\to t^n f(t).$$

Substituindo na parte esquerda da fórmula 15

$$F_1(p) = \frac{F_1^*(p)}{p}, \qquad F_2(p) = \frac{F_2^*(p)}{p}$$

e multiplicando por p, obtemos:

$$15' \qquad \frac{1}{p} F_1^*(p) F_2^*(p) \div\!\!\to \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau.$$

QUADRO 1

nos	$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$	$f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\operatorname{sen} at$
3	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\cos at$
4	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
5	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$\operatorname{sh} \alpha t$
6	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$\operatorname{ch} \alpha t$
7	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-\alpha t} \operatorname{sen} at$
8	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-\alpha t} \cos at$
9	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
10	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$	$t \operatorname{sen} at$
11	$-\frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t \cos at$
12	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
13	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\operatorname{sen} at - at \cos at)$
14	$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$	$t^n f(t)$
15	$F_1(p)\, F_2(p)$	$\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau$

Nota **— As fórmulas 13 e 15 do quadro serão estabelecidas no seguimento.**

§ 10. Equação auxiliar duma equação diferencial dada

Seja dada uma equação diferencial linear da ordem n de coeficientes constantes a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x(t) = f(t). \quad (31)$$

Pede-se para determinar a solução desta equação $x = x(t)$ para $t \geqslant 0$, que verifica as condições iniciais:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \quad (32)$$

O problema já tinha sido resolvido da seguinte maneira: procuravamos a solução geral da equação (31) contendo n constantes arbitrárias; seguidamente determinavamos as constantes de maneira que as condições iniciais (32) fossem verificadas.

Exporemos agora um método mais simples de resolução deste problema, o método do cálculo operacional. Procuraremos a imagem L da solução $x(t)$ da equação (31) que verifica as condições (32). Designemos esta imagem L por $\bar{x}(p)$; assim $\bar{x}(p) \rightarrow x(t)$.

Suponhamos que a imagem da solução da equação (31) existe, bem como as suas derivadas até à ordem n inclusivé (uma vez achada a solução podemos verificar a validade desta suposição). Multipliquemos os dois membros da igualdade (31) por e^{-pt} em que $p = a + ib$ e integremos em t nos limites de 0 a ∞:

$$a_0 \int_0^\infty e^{-pt} \frac{d^n x}{dt^n} dt + a_1 \int_0^\infty e^{-pt} \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} dt + \ldots$$

$$\ldots + a_n \int_0^\infty e^{-pt} x(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt. \quad (33)$$

Na parte esquerda da igualdade temos a imagem L da função $x(t)$ e das suas derivadas, na parte direita a imagem L da função $f(t)$ que designaremos por $F(p)$. Por conseguinte, a igualdade (33) pode ser posta sob a forma:

$$a_0 L\left\{\frac{d^n x}{dt^n}\right\} + a_1 L\left\{\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right\} + \ldots + a_n L\{x(t)\} = L\{f(t)\}.$$

Substituindo nesta igualdade as imagens da função e as suas derivadas pelas expressões (27), (29) e (30), obtemos:

$$a_0\{p^n\bar{x}(p) - [p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' + p^{n-3}x_0'' + \ldots + x_0^{(n-1)}]\} +$$
$$+ a_1\{p^{n-1}\bar{x}(p) - [p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x_0' + \ldots + x_0^{(n-2)}]\} +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ a_{n-1}\{px(p) - [x_0]\} + a_n\bar{x}(p) = F(p). \tag{34}$$

A equação (34) chama-se *equação auxiliar* ou *equação imagem*. Nesta equação a incógnita é a imagem $\bar{x}(p)$, que determinamos a partir desta equação. Transformemos esta equação deixando no primeiro membro os termos que contêm $\bar{x}(p)$:

$$\bar{x}(p)[a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n] =$$
$$= a_0[p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' + \ldots + x_0^{(n-1)}] +$$
$$+ a_1[p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x_0' + \ldots + x_0^{(n-2)}] +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ a_{n-2}[px_0 + x_0'] + a_{n-1}[x_0] + F(p). \tag{34'}$$

O coeficiente de $\bar{x}(p)$ no primeiro membro da igualdade (34') é um polinómio em p de ordem n que se pode obter se no primeiro membro da equação (31) se substituir as derivadas pelas potências correspondentes de p. Designemo-lo por $\varphi_n(p)$:

$$\varphi_n(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n. \tag{35}$$

O segundo membro da equação (34') está assim composto:

o coeficiente a_{n-1} é multiplicado por x_0,
o coeficiente a_{n-2} é multiplicado por $px_0 + x_0'$
. . . .
o coeficiente a_1 é multiplicado por $p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x_0' + \ldots + x_0^{(n-2)}$,
o coeficiente a_0 é multiplicado por $p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' + \ldots + x_0^{(n-1)}$.

Façamos a soma de todos estes produtos. Juntemos ainda a imagem do segundo membro da equação diferencial $F(p)$. Todos os termos do segundo membro da igualdade (34'), excepto $F(p)$, constituem após agrupamento dos termos semelhantes, um polinómio de grau $n - 1$ cujos coeficientes são conhecidos. Designemo-lo por $\psi_{n-1}(p)$.

Assim, a equação (34') pode ser escrita:

$$\bar{x}(p)\,\varphi_n(p) = \psi_{n-1}(p) + F(p).$$

Determinemos $\bar{x}(p)$ desta equação:

$$\bar{x}(p) = \frac{\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)} + \frac{F(p)}{\varphi_n(p)}. \tag{36}$$

Resulta que $\bar{x}(p)$ assim determinado, é a imagem da solução $x(t)$ da equação (31), que verifica as condições iniciais (32). Se agora determinarmos a função $x^*(t)$ cuja imagem é a função $\bar{x}(p)$, definida pela igualdade (36), resultará, então, do teorema da unicidade formulado no § 1 que $x^*(t)$ é a solução da equação (31) que verifica as condições (32), isto é,

$$x^*(t) = x(t).$$

Se a solução da equação (31) for obtida pelas condições iniciais nulas: $x_0 = x_0' = x_0'' = \ldots = x_0^{(n-1)} = 0$, então, na igualdade (36), teremos $\psi_{n-1}(p) = 0$ e ela será da forma

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{\varphi_n(p)}$$

ou

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n}. \tag{36'}$$

Exemplo — 1. Determinar a solução da equação

$$\frac{dx}{dt} + x = 1,$$

que verifica a condição $x = 0$ para $t = 0$.

Resolução — Formemos a equação auxiliar

$$x(p)(p+1) = 0 + \frac{1}{p} \quad \text{ou} \quad \bar{x}(p) = \frac{1}{(p+1)p}$$

Decompondo a fracção do segundo membro em fracções elementares, obtemos:

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Utilizando as fórmulas 1 e 4 do quadro 1, encontramos a solução:

$$x(t) = 1 - e^{-t}.$$

Exemplo — 2. Determinar a solução da equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 1,$$

que verifica as condições iniciais: $x_0 = x_0' = 0$ para $t = 0$.

Resolução — Escrevamos a equação auxiliar (34')

$$\bar{x}(p)(p^2+9)=\frac{1}{p} \quad \text{ou} \quad \bar{x}(p)=\frac{1}{p(p^2+9)}.$$

Decompondo esta fracção em fracções elementares, obtemos:

$$\bar{x}(p)=\frac{-\frac{1}{9}p}{p^2+9}+\frac{\frac{1}{9}}{p}.$$

Em virtude das fórmulas 1 e 3 do quadro 1, obtemos a solução:

$$x(t)=-\frac{1}{9}\cos 3t+\frac{1}{9}.$$

Exemplo — 3. Determinar a solução da equação

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=t,$$

que verifica as condições iniciais: $x_0=x_0'=0$ para $t=0$.

Resolução — Escrevamos a equação auxiliar (34')

$$\bar{x}(p)(p^2+3p+2)=\frac{1}{p^2}$$

ou

$$\bar{x}(p)=\frac{1}{p^2}\frac{1}{(p^2+3p+2)}=\frac{1}{p^2(p+1)(p+2)}.$$

Decompondo esta fracção em fracções elementares pelo método dos coeficientes indeterminados, obtemos:

$$x(p)=\frac{1}{2}\frac{1}{p^2}-\frac{3}{4}\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{4(p+2)}.$$

Segundo as fórmulas 9, 1 e 4 do quadro 1, obtemos a solução:

$$x(t)=\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}+e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t}.$$

Exemplo — 4. Determinar a solução da equação

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+5x=\operatorname{sen} t,$$

que verifica as condições: $x_0=1$, $x_0'=2$ para $t=0$.

Resolução — Escrevamos a equação auxiliar (34')

$$x(p)(p^2+2p+5)=p\cdot 1+2+2\cdot 1+L\{\operatorname{sen} t\}$$

ou

$$\bar{x}(p)(p^2+2p+5)=p+4+\frac{1}{p^2+1},$$

donde obtemos $x(p)$:

$$x(p)=\frac{p+4}{p^2+2p+5}+\frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+5)}.$$

Decompondo esta última fracção do segundo membro em fracções elementares, podemos escrever:

$$\bar{x}(p)=\frac{\frac{11}{10}p+4}{p^2+2p+5}+\frac{-\frac{1}{10}p+\frac{1}{5}}{p^2+1}$$

ou

$$x(p)=\frac{11}{10}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}+\frac{29}{10\cdot 2}\cdot\frac{2}{(p+1)^2+2^2}-$$
$$-\frac{1}{10}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

Em virtude das fórmulas 8, 7, 3, e 2 do quadro 1, obtemos a solução:

$$x(t)=\frac{11}{10}e^{-t}\cos 2t+\frac{29}{20}e^{-t}\operatorname{sen} 2t-\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{5}\operatorname{sen} t$$

ou, finalmente:

$$x(t)=e^{-t}\left(\frac{11}{10}\cos 2t+\frac{29}{20}\operatorname{sen} 2t\right)-\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{5}\operatorname{sen} t.$$

§ 11. Teorema da decomposição

Resulta, da fórmula (36) do parágrafo precedente, que a imagem da solução duma equação diferencial linear se compõe de dois termos: o primeiro é uma fracção racional regular de p, o segundo termo uma fracção em que o numerador é a imagem do segundo membro da equação $F(p)$ e o denominador do polinómio $\varphi_n(p)$.

Se $F(p)$ é uma fracção racional, o segundo termo será também uma fracção racional. É preciso também, saber encontrar o original cuja imagem é uma fracção racional regular. Abordaremos esta questão no presente parágrafo. Suponhamos que a imagem L duma certa função é uma fracção racional regular de p:

$$\frac{\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)}.$$

Pede-se para achar o original. No § 7 do cap. X, t. I, mostramos que cada fracção racional regular pode ser representada sob a forma de fracções elementares de 4 tipos:

I. $\dfrac{A}{p-a}$,

II. $\dfrac{A}{(p-a)^k}$,

III — $\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2}$ onde as raízes do denominador são complexas, isto é, $\frac{a_1^2}{4} - a_2 < 0$,

IV. — $\frac{Ap+B}{(p^2+a_1p+a_2)^k}$, onde $k \geqslant 2$, as raízes do denominador são complexas.

Encontremos o original para cada uma das quatro fracções elementares. Para as fracções do tipo I, obtemos, em virtude da fórmula 4 do quadro 1:

$$\frac{A}{p-a} \rightarrow Ae^{at}.$$

Para a fracção do tipo II, em virtude das fórmulas 9 e 4 do quadro 1, obtemos:

$$\frac{A}{(p-a)^k} \rightarrow A\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{at}. \tag{37}$$

Consideremos agora as fracções do tipo III. Efectuemos as seguintes transformações:

$$\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2} = \frac{Ap+B}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2} =$$

$$= \frac{A\left(p+\frac{a_1}{2}\right)+\left(B-\frac{Aa_1}{2}\right)}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2} = A\frac{p+\frac{a_1}{2}}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2} +$$

$$+\left(B-\frac{Aa_1}{2}\right)\frac{1}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}.$$

Designando aqui o primeiro e o segundo termo, respectivamente por M e N, obtemos, em virtude das fórmulas 8 e 7 do quadro 1:

$$M \rightarrow Ae^{-\frac{a_1}{2}t}\cos t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}},$$

$$N \rightarrow \left(B-\frac{Aa_1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}e^{-\frac{a_1}{2}t}\operatorname{sen} t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}$$

Assim, finalmente:

$$\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2} \to e^{-\frac{a_1}{2}t} \times,$$

$$\times\left[A\cos t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}+\frac{B-\frac{Aa_1}{2}}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}\,\text{sen}\,t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right] \quad (38)$$

Não abordaremos aqui as fracções elementares do tipo IV para não nos lançarmos em cálculos bastante fastidiosos. Para alguns casos particulares esta questão será analisada mais adiante.

§ 12. Exemplos de resolução das equações diferenciais e dos sistemas de equações diferenciais pelo método do cálculo operacional

Exemplo — 1. Determinar a solução da equação

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4x=\text{sen } 3x,$$

que verifica as condições iniciais $x_0 = 0$, $x_0' = 0$ para $t = 0$.

Resolução — Formemos a equação auxiliar (34')

$$\bar{x}(p)(p^2+4)=\frac{3}{p^2+9}, \quad \bar{x}(p)=\frac{3}{(p^2+9)(p^2+4)}$$

ou

$$\bar{x}(p)=\frac{-\frac{3}{5}}{p^2+9}+\frac{\frac{3}{5}}{p^2+4}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{p^2+9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{p^2+4},$$

donde obtemos a solução

$$x(t)=\frac{3}{10}\,\text{sen}\,2t-\frac{1}{5}\,\text{sen}\,3t.$$

Exemplo — 2. Determinar a solução da equação

$$\frac{d^3x}{dt^3}+x=0,$$

que verifica as condições iniciais: $x_0=1$, $x_0'=3$, $x_0''=8$ para $t = 0$.

Resolução — Formemos a equação auxiliar (34')

$$\bar{x}(p)(p^3+1)=p^2\cdot 1+p\cdot 3+8,$$

obtemos

$$\bar{x}(p)=\frac{p^2+3p+8}{p^3+1}=\frac{p^2+3p+8}{(p+1)(p^2-p+1)}.$$

Decomponhamos a fracção racional obtida em fracções elementares:

$$\frac{p^2+3p+8}{(p+1)(p^2-p+1)}=\frac{2}{p+1}+\frac{-p+6}{p^2-p+1}=2\cdot\frac{1}{p+1}-$$

$$-\frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}+\frac{11}{\sqrt{3}}\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Utilizando o quadro 1, escrevemos a solução:

$$x(t)=2e^{-t}+e^{\frac{1}{2}t}\left(-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{11}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Exemplo — 3. Determinar a solução da equação

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=t\cos 2t,$$

que verifica as condições iniciais: $x=0$, $x_0'=0$ $t=0$.

Resolução — Escrevamos a equação auxiliar (34')

$$\bar{x}(p)(p^2+1)=\frac{1}{p^2+4}-\frac{8}{(p^2+4)^2},$$

donde

$$\bar{x}(p)=-\frac{5}{9}\,\frac{1}{p^2+1}+\frac{5}{9}\,\frac{1}{p^2+4}+\frac{8}{3}\,\frac{1}{(p^2+4)^2}.$$

Por conseguinte,

$$x(t)=-\frac{5}{9}\operatorname{sen}t+\frac{5}{18}\operatorname{sen}2t+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}2t-t\cos 2t\right).$$

É evidente que o método do cálculo operacional permite igualmente resolver os sistemas de equações diferenciais lineares. Mostremo-lo no exemplo.

Exemplo — 4. Determinar a solução da equação

$$3\frac{dx}{dt}+2x+\frac{dy}{dt}=1,$$

$$\frac{dx}{dt}+4\frac{dy}{dt}+3y=0,$$

que verifica as condições iniciais: $x=0$, $y=0$ para $t=0$.

Resolução — Designemos $x(t) \leftarrow \bar{x}(p)$, $y(t) \leftarrow \bar{y}(p)$ e escrevamos o sistema das equações auxiliares:

$$3p+2)\,\bar{x}(p)+p\bar{y}(p)=\frac{1}{p},$$

$$p\bar{x}(p)+(4p+3)\,\bar{y}(p)=0.$$

Resolvendo este sistema, obtemos:

$$\bar{x}(p)=\frac{4p+3}{p(p+1)(11p+6)}=\frac{1}{2p}-\frac{1}{5(p+1)}-\frac{3}{10(11p+6)},$$

$$\bar{y}(p)=-\frac{1}{(11p+6)(p+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{p+1}-\frac{11}{11p+6}\right).$$

Segundo as imagens obtemos de cada vez o original, isto é, as soluções procuradas do sistema:

$$x(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}e^{-t}-\frac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t},$$

$$y(t)=\frac{1}{5}(e^{-t}-e^{-\frac{6}{11}t}).$$

Resolve-se, duma maneira análoga, os sistemas lineares de ordem superior.

§ 13. Teorema do enrolamento (*Convolution*)

Na altura da resolução das equações diferenciais pelo método do cálculo operacional servimo-nos repetidas vezes do

Teorema do enrolamento — *Se $F_1(p)$ e $F_2(p)$ são as imagens das funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$, isto é, se*

$$F_1(p) \to f_1(t) \quad \text{e} \quad F_2(p) \to f_2(t),$$

então, *$F_1(p)\,F_2(p)$ é a imagem da função*

$$\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau,$$

por outras palavras

$$F_1(p)\,F_2(p) \to \int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau. \tag{39}$$

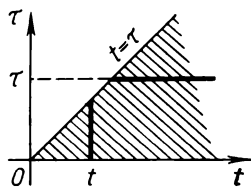
Demonstração — Determinemos a imagem da função

$$\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau,$$

partindo da definição de imagem

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau\right\}=\int_0^\infty e^{-pt}\left[\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau\right]dt.$$

O integral do segundo membro é um integral duplo, que se toma no domínio limitado pelas rectas $\tau = 0$, $\tau = t$ (fig. 380).

Mudando a ordem de integração neste integral, obtemos, então:

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau\right\} =$$

$$= \int_0^\infty \left[f_1(\tau) \int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)\, dt\right] d\tau.$$

Fig. 380

Efectuando a mudança de variável $t - \tau = z$ no integral interior, obtemos:

$$\int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)\, dt = \int_0^\infty e^{-p(z+\tau)} f_2(z)\, dz =$$

$$= e^{-p\tau} \int_0^\infty e^{-pz} f_2(z)\, dz = e^{-p\tau} F_2(p).$$

Por conseguinte,

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau\right\} = \int_0^\infty f_1(\tau)\, e^{-p\tau} F_2(p)\, d\tau =$$

$$= F_2(p) \int_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau)\, d\tau = F_2(p)\, F_1(p).$$

Assim,

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau \leftarrow F_1(p)\, F_2(p).$$

É a fórmula 15 do quadro 1.

Nota — 1. A expressão $\int_0 f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau$ chama-se enrolamento (ou produto de composição) das duas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$. A operação do cálculo correspondente chama-se transformação de enrolamento de duas funções e tem-se, então,

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau.$$

A validade desta última igualdade pode ser estabelecida efectuando a mudança de variável $t - \tau = z$ no integral do segundo membro.

Exemplo — Determinar a solução da equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = f(t),$$

que verifica as condições iniciais: $x_0 = x_0' = 0$ para $t = 0$.

Resolução — Escrevamos a equação auxiliar (34')

$$\bar{x}(p)(p^2+1) = F(p),$$

em que $F(p)$ é a imagem da função $f(t)$. Por conseguinte, $\bar{x}(p) = \frac{1}{p^2+1} F(p)$, mas $\frac{1}{p^2+1} \doteqdot \operatorname{sen} t$ e $F(p) \doteqdot f(t)$. Aplicando o teorema do enrolamento (39) e designando $\frac{1}{p^2+1} = F_2(p)$, $F(p) = F_1(p)$, obtemos

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) \operatorname{sen}(t-\tau)\, d\tau. \tag{40}$$

Nota — 2. Com a ajuda do teorema de enrolamento pode-se determinar fàcilmente a imagem do integral duma dada função, se se conhecer a imagem dessa função; precisamente se $F(p) \doteqdot f(t)$ então,

$$\frac{1}{p} F(p) \doteqdot \int_0^t f(\tau)\, d\tau. \tag{41}$$

Com efeito, se introduzirmos as notações

$$f_1(t) = f(t), \quad f_2(t) = 1, \text{ então, } F_1(p) = F(p), \quad F_2(p) = \frac{1}{p}.$$

Substituindo estas funções na fórmula (39), obtemos a fórmula (41).

§ 14. Equações diferenciais das oscilações mecânicas. Equações diferenciais da teoria dos circuitos eléctricos

Sabe-se da mecânica que as oscilações dum ponto material de massa m são descritos pela equação (*)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{1}{m} f_1(t); \tag{42}$$

designando aqui x o vértice do ponto duma certa posição, k a rigidez do sistema elástico, por exemplo da mola, a força de resistência ao movimento é proporcional (com um coeficiente de proporcionalidade λ) no primeiro grau da velocidade, $f_1(t)$ é a força exterior ou de perturbação.

(*) Ver, por exemplo, cap. XIII, § 26, t. II, em que se estabeleceu uma equação deste género na altura do estudo das oscilações dum peso fixado a uma mola.

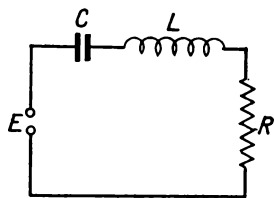
A solução duma equação do tipo (42) descreve igualmente as pequenas oscilações de outros sistemas mecânicos com um grau de liberdade, por exemplo, as vibrações de torção do volante sobre um tronco flexível, se x for o ângulo de rotação do volante, m o momento de inércia do volante, k a rigidez à torção do tronco e $mf_1(t)$ o momento das forças exteriores em relação ao eixo de rotação. As equações do tipo (41) descrevem não sòmente as oscilações mecânicas mas também os fenómenos que se desenrolam nos circuitos eléctricos.

$i = \frac{dQ}{dt}$

Fig. 381

Seja um círculo eléctrico, composto duma inductância L, duma resistência R e duma capacidade C, ao qual é aplicado uma força electro-motriz E (fig. 381). Designemos por i a corrente no circuito e por Q a carga do condensador, então, como se sabe da electrotécnica i e Q verificam as equações seguintes:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = E, \tag{43}$$

$$\frac{dQ}{dt} = i. \tag{44}$$

Obtemos da equação (44):

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = \frac{di}{dt}. \tag{44'}$$

Substituindo (44) e (44′) na equação (43), obtemos para Q uma uma equação do tipo (42):

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E. \tag{45}$$

Derivando os dois membros da equação (43) e utilizando a equação (44), obtemos a equação que determina a corrente i:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{dE}{dt}. \tag{46}$$

As equações (45) e (46) são equações do tipo (42).

§ 15. Resolução da equação diferencial das oscilações

Escrevamos a equação das oscilações sob a forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = f(t), \tag{47}$$

onde o sentido mecânico ou físico da função procurada x, dos coeficientes a_1, a_2, e da função $f(t)$ é fàcilmente estabelecida comparando esta equação com as equações (42), (45) e (46). Determinemos a solução da equação (47), que verifica as condições iniciais: $x = x_0$, $x' = x'_0$ para $t = 0$.

Formemos a equação auxiliar para a equação (47):

$$\bar{x}(p)(p^2 + a_1 p + a_2) = x_0 p + x'_0 + a_1 x_0 + F(p), \tag{48}$$

em que $F(p)$ é a imagem da função $f(t)$. Obtemos da igualdade (48):

$$\bar{x}(p) = \frac{x_0(p) + x'_0 + a_1 x_0}{p^2 + a_1 p + a_2} + \frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2}. \tag{49}$$

Assim, para a solução $Q(t)$ da equação (45), que verifica as condições iniciais: $Q = Q_0$, $Q' = Q'_0$ para $t = 0$, a imagem será da forma

$$\bar{Q}(p) = \frac{L(Q_0 p + Q'_0) + RQ_0}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} + \frac{\bar{E}(p)}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}.$$

O carácter da solução depende essencialmente das raízes do binómio $p^2 + a_1 p + a_2$: elas serão complexas, reais e distintas ou reais e iguais. Consideremos em detalhe o caso em que as raízes do binómio são complexas, isto é, quando $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2 < 0$. Analisar-se-á duma maneira análoga os outros casos.

Como a imagem da soma de duas funções é igual à soma das suas imagens, em virtude da fórmula (38) o original para a primeira

fracção situado na parte direita de (49) será da forma

$$\frac{x_0 p + x_0' + a_1 x_0}{p^2 + a_1 p + a_2} \dashrightarrow e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[x_0 \cos t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} + \right.$$

$$\left. + \frac{x_0' + \frac{x_0 a_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \operatorname{sen} t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right]. \qquad (50)$$

Determinemos, em seguida, o original correspondente à fracção

$$\frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2}.$$

Utilizaremos aqui o teorema do enrolamento atendendo a que

$$\frac{1}{p^2 + a_1 p + a_2} \dashrightarrow \frac{e^{-\frac{a_1}{2}t}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \operatorname{sen} t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}, \qquad F(p) \dashrightarrow f(t).$$

Por consequência, obtemos, segundo a fórmula (39)

$$\frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2} \dashrightarrow$$

$$\dashrightarrow \frac{1}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \int_0^t f(\tau)\, e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)} \operatorname{sen}(t-\tau) \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\, d\tau. \qquad (51)$$

Assim, obtemos de (49) tendo em conta (50) e (51):

$$x(t) = e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[x_0 \cos t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} + \frac{x_0' + \frac{x_0 a_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \operatorname{sen} t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \int_0^t f(\tau)\, e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)} \operatorname{sen}(t-\tau) \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\, d\tau. \qquad (52)$$

Se a força exterior $f(t) = 0$, isto é, se estivermos em presença de oscilações mecânicas ou eléctricas livres, a solução é dada pelo primeiro termo do segundo membro da expressão (52). Se os valores iniciais são iguais a zero: $x_0 = x'_0 = 0$, então, a solução é dada pelo segundo termo do segundo membro da igualdade (52). Consideremos estes casos mais em detalhe.

§ 16. Estudo das oscilações livres

Suponhamos que a equação (47) descreve oscilações livres, isto é, que $f(t) = 0$. Introduzamos, para maior comodidade na escrita das fórmulas, as notações: $a_1 = 2n$, $a_2 = k^2$, $k_1^2 = k^2 - n^2$. Então, a equação (47) tomará a forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = 0. \qquad (53)$$

A solução desta equação x_1 que verifica as condições iniciais ($x = x_0$, $x' = x'_0$ para $t = 0$) é dada pela fórmula (50) ou pelo primeiro termo da fórmula (52):

$$x_1(t) = e^{-nt}\left[x_0 \cos k_1 t + \frac{x'_0 + x_0 n}{k_1} \operatorname{sen} k_1 t\right]. \qquad (54)$$

Façamos $x_0 = a$, $\frac{x'_0 + x_0 n}{k_1} = b$. É evidente que para todo o a e b se pode escolher M e δ de maneira que se tenha $a = M \operatorname{sen} \delta$, $b = M \cos \delta$, então, $M^2 = a^2 + b^2$, $tg\, \delta = a/b$. Escrevamos a fórmula (54) sob a forma:

$$x_1 = e^{-nt}[M \cos k_1 t \operatorname{sen} \delta + M \operatorname{sen} k_1 t \cos \delta],$$

pode-se, então, finalmente escrever a solução assim:

$$x_1 = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{-nt} \operatorname{sen}(k_1 t + \delta). \qquad (55)$$

A solução (55) corresponde às *oscilações amortecidas.*

Se $2n = a_1 = 0$, isto é, se se desprezar a fricção interna, então, a solução será de forma

$$x_1 = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen}(k_1 t + \delta).$$

Teremos neste caso *oscilações harmónicas.* (No tomo II, cap. XIII, § 27, são dadas, nas figuras 270 e 271, os gráficos das oscilações harmónicas e amortecidas).

§ 17. Estudo das oscilações harmónicas amortecidas no caso duma força exterior periódica

Na altura do estudo das oscilações elásticas dos sistemas mecânicos e particularmente na ocasião do estudo das oscilações eléctricas, teve-se de considerar diversos tipos de forças exteriores $f(t)$. Estudemos em detalhe o caso de uma força exterior periódica. Suponhamos que a equação (47) é da forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = A \operatorname{sen} \omega t. \tag{56}$$

Para elucidar a natureza do movimento basta considerar o caso em que $x_0 = x_0' = 0$. Poder-se-ia obter a solução da equação segundo a fórmula (52), mas é mais cómodo aqui do ponto de vista metódico obter a solução efectuando todos os cálculos intermediários.

Escrevamos a equação da imagem

$$\bar{x}(p)(p^2 + 2np + k^2) = A\frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

donde obtemos:

$$\bar{x}(p) = \frac{A\omega}{(p^2 + 2np + k^2)(p^2 + \omega^2)}. \tag{57}$$

Consideremos o caso em que $2n \neq 0$ $(n^2 < k^2)$. Decomponhamos a fracção da parte direita em fracções elementares:

$$\frac{A\omega}{(p^2 + 2np + k^2)(p^2 + \omega^2)} = \frac{Np + B}{p^2 + 2np + k^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + \omega^2}. \tag{58}$$

Determinemos as constantes B, C, D pelo método dos coeficientes indeterminados. Utilizando a fórmula (38) obtemos de (57) o original

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}\Big\{(k^2 - \omega^2)\operatorname{sen}\omega t - 2n\omega\cos\omega t +$$

$$+ e^{-nt}\left[(2n^2 - k^2 + \omega^2)\frac{\omega}{k_1}\operatorname{sen} k_1 t + 2n\omega\cos k_1 t\right]\Big\}; \tag{59}$$

aqui de novo $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$. É precisamente a solução da equação (56), que verifica as condições iniciais $x_0 = x_0' = 0$ para $t = 0$.

Consideremos o caso particular para o qual $2n = 0$. No sistema mecânico, por exemplo, isso corresponde ao caso em que não há resistência interna, nem amortecedores. Para um contorno eléctrico isso corresponde ao caso em que $R = 0$, por outras palavras, que a resistência interior do circuito é nula. A equação (56) toma, então, a forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = A \operatorname{sen} \omega t, \qquad (60)$$

e obtemos a solução desta equação que verifica as condições $x_0 = x_0' = 0$ para $t = 0$, se pusermos na fórmula (59) $n = 0$:

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2)\,k}[-\omega \operatorname{sen} kt + k \operatorname{sen} \omega t]. \qquad (61)$$

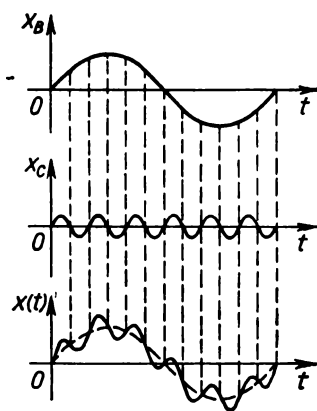



Fig. 382

Temos aqui a soma de duas oscilações harmónicas: as oscilações próprias de frequência k:

$$x_{\text{pr}}(t) = -\frac{A}{k^2 - \omega^2}\frac{\omega}{k} \operatorname{sen} kt$$

e as oscilações forçadas de frequência ω:

$$x_{\text{forc}}(t) = \frac{A}{k^2 - \omega^2} \operatorname{sen} \omega t.$$

No caso em que $k \gg \omega$, o carácter das oscilações está representado na figura 382.

Voltemos, uma vez mais, à fórmula (59). Se $2n > 0$, o que tem lugar para os sistemas mecânicos e eléctricos considerados, o termo, que comporta o factor e^{-nt} e que representa as oscilações próprias amortecidas, decresce ràpidamente quando t cresce. Para t suficientemente grandes o carácter das oscilações é determinado pelo termo que não contém o factor e^{-nt} isto é, o termo

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}\{(k^2 - \omega^2) \operatorname{sen} \omega t - 2n\omega \cos \omega t\}. \qquad (62)$$

Introduzamos as notações:

$$\frac{A\,(k^2 - \omega^2)}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} = M \cos \delta; \qquad -\frac{A \cdot 2n\omega}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} = M \operatorname{sen} \delta, \qquad (63)$$

onde

$$M = \frac{A}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}.$$

Pode-se escrever assim a solução (62):

$$x(t) = \frac{A^1}{k^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4n^2 \frac{\omega^2}{k^4}}} \operatorname{sen}(\omega t + \delta). \qquad (64)$$

Resulta da fórmula (64) que a frequência k das oscilações forçadas corresponde à frequência ω da força exterior. Se a resistência interna caracterizada pelo número n for fraca e se a frequência ω for próxima da frequência k, a amplitude das oscilações pode tornar-se arbitràriamente grande, pois o denominador pode tornar-se também tão pequeno quanto se queira. Quando $n = 0$, $\omega^2 = k^2$ a solução não é expressa pela fórmula (64).

§ 18. Solução da equação das oscilações no caso da ressonância

Consideremos o caso particular em que $a_1 = 2n = 0$, isto é, quando a resistência é nula, e a frequência da força exterior coincide com a frequência das oscilações próprias $k = \omega$. Neste caso, a equação toma a forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = A \operatorname{sen} kt. \qquad (65)$$

Procuraremos a solução desta equação que verifica as condições iniciais: $x_0 = 0$, $x_0' = 0$ para $t = 0$. A equação auxiliar será

$$\bar{x}(p)(p^2 + k^2) = A \frac{k}{p^2 + k^2},$$

donde

$$\bar{x}(p) = \frac{Ak}{(p^2 + k^2)^2}. \qquad (66)$$

Obtivemos uma fracção racional regular do tipo IV que não estudamos sob a sua forma geral. Para determinar o original pela imagem (66) recorreremos ao artifício seguinte. Escrevamos a identidade (fórmula 2, quadro I):

$$\frac{k}{p^2 + k^2} = \int_0^\infty e^{-pt} \operatorname{sen} kt \, dt. \qquad (67)$$

Derivemos (*) os dois membros desta igualdade em relação a k:

$$\frac{1}{p^2+k^2}-\frac{2k^2}{(p^2+k^2)^2}=\int_0^\infty e^{-pt}t\cos kt\,dt.$$

Utilizando a igualdade (67), escrevemos, assim, esta igualdade:

$$-\frac{2k^2}{(p^2+k^2)^2}=\int_0^\infty e^{-pt}\left[t\cos kt-\frac{1}{k}\operatorname{sen} kt\right]dt.$$

Daí resulta imediatamente:

$$\frac{Ak}{(p^2+k^2)^2}\to\frac{A}{2k}\left(\frac{1}{k}\operatorname{sen} kt-t\cos kt\right)$$

(obtemos, desta fórmula, a fórmula 13 do quadro 1). Assim, a solução da equação (65) será

$$x(t)=\frac{A}{2k}\left(\frac{1}{k}\operatorname{sen} kt-t\cos kt\right) \qquad (68)$$

Estudemos o segundo termo desta solução

$$x_2(t)=-\frac{A}{2k}t\cos kt; \qquad (68')$$

quando t cresce, esta grandeza não é limitada. A amplitude das oscilações correspondente à fórmula (68') aumenta indefinidamente quando t cresce indefinidamente. Por conseguinte, a amplitude das oscilações correspondente à fórmula (68) aumenta também indefinidamente. Este fenómeno que tem lugar quando a frequência das oscilações próprias coincide com a frequência da força exterior chama-se *ressonância* (ver igualmente, tomo II, cap. XIII, § 29, fig. 273).

§ 19. Teorema do retardamento

Suponhamos que a função $f(t)$ é idênticamente nula para $t<0$ (fig. 383, *a*). Então, a função $f(t-t_0)$ será idênticamente nula quando $t<t_0$ (fig. 383, *b*). Demonstremos o teorema do retardamento seguinte.

(*) O integral do segundo membro pode ser representado sob a forma de soma de dois integrais da variável real em que cada um depende do parâmetro k.

Teorema — *Se $F(p)$ é a imagem da função $f(t)$, então $e^{-pt_0}F(p)$ é a imagem da função $f(t-t_0)$, isto é, se $f(t) \doteq F(p)$, então,*

$$f(t-t_0) \doteq e^{-pt_0}F(p).$$

f(t) f(t-t0) 0 t (a) 0 t0 t (b)

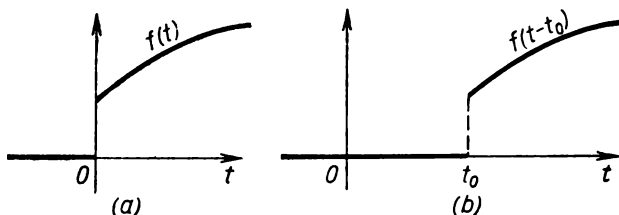



Fig. 383

Demonstração — Por definição de imagem, temos:

$$L\{f(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0)\,dt =$$

$$= \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t-t_0)\,dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0)\,dt.$$

O primeiro integral do segundo membro da igualdade é igual a zero, visto que $f(t-t_0)=0$ quando $t<t_0$. Efectuemos, no segundo integral, uma mudança de variável fazendo $t-t_0=z$:

$$L\{f(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} e^{-p(z+t_0)} f(z)\,dz = e^{-pt_0}\int_0^{\infty} e^{-pz} f(z)\,dz = e^{-pt_0}F(p).$$

Assim, $f(t-t_0) \doteq e^{-pt_0}F(p)$.

Exemplo — Estabelecemos no § 2 para a função unidade de Heaviside: $\sigma_0(t) \doteq \frac{1}{p}$. Resulta, em virtude do teorema demonstrado, que para a função

σ0(t-h) 0 h t

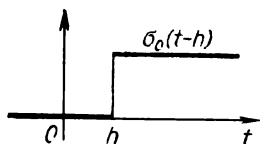



Fig. 384

$\sigma_0(t-h)$ representada na figura 384, a imagem L será $\frac{1}{p}e^{-ph}$, isto é,

$$\sigma_0(t-h) \doteq \frac{1}{p}e^{-ph}.$$

Exercícios

Determinar a solução das seguintes equações para os valores iniciais dados:

1. $\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=0$, $x=1$, $x'=2$ para $t=0$. Resp. $x=4e^{-t}-3e^{-2t}$.
2. $\frac{d^3x}{dt^3}-\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $x=2$, $x'=0$, $x''=1$ para $t=0$. Resp. $x=1-t+e^t$.
3. $\frac{d^2x}{dt^2}-2a\frac{dx}{dt}+(a^2+b^2)x=0$, $x=x_0$, $x'=x_0'$ para $t=0$. Resp. $x=\frac{e^{at}}{b}\times$ $\times[x_0 b\cos bt+(x_0'-x_0a)\,\text{sen}\,bt]$.
4. $\frac{d^2x}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}+2x=e^{5t}$, $x=1$, $x'=2$ para $t=0$. Resp. $x=\frac{1}{12}e^{5t}+\frac{1}{4}e^t+$ $+\frac{2}{3}e^{2t}$
5. $\frac{d^2x}{dt^2}+m^2x=a\cos nt$, $x=x_0$, $x'=x_0'$ para $t=0$. Resp. $x=\frac{a}{m^2-n^2}\times$ $\times(\cos nt-\cos mt)+x_0\cos mt+\frac{x_0'}{m}\,\text{sen}\,mt$.
6. $\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}=t^2$, $x=0$, $x'=0$ para $t=0$. Resp. $x=2e^t-\frac{1}{3}t^3-t^2-2t-2$.
7. $\frac{d^3x}{dt^3}+x=\frac{1}{2}t^2e^t$, $x=x'=x''=0$ para $t=0$. Resp. $x=\frac{1}{4}\left(t^2-3t+\frac{3}{2}\right)e^t-$ $-\frac{1}{24}e^{-t}-\frac{1}{3}\left\{\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\,\text{sen}\,\frac{t\sqrt{3}}{2}\right\}e^{\frac{1}{2}t}$
8. $\frac{d^3x}{dt^3}+x=1$, $x_0=x_0'=x_0''=0$ para $t=0$. Resp. $x=1-\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\times$ $\times\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}$
9. $\frac{d^4x}{dt^4}-2\frac{d^2x}{dt^2}+x=\text{sen}\,t$, $x_0=x_0'=x_0''=x_0'''=0$ para $t=0$. Resp. $x=\frac{1}{8}\times$ $\times[e^t(t-2)+e^{-t}(t+2)+2\,\text{sen}\,t]$.
10. Determinar a solução do sistema das equações diferenciais

$$\frac{d^2x}{dt^2}+y=1,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}+x=0,$$

que verifica as condições iniciais $x_0=y_0=x_0'=y_0'=0$ para $t=0$.

Resp. $x(t)=-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}$,

$y(t)=-\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}+1$.

ÍNDICE ALFABÉTICO